# ТЕОРИЯ НА ИНВАРИАНТНИТЕ СИСТЕМИ ЗА УПРАВЛЕНИЕ

(Научна разработка)

Автор: Милан Михайлов Станков, живущ в София, ж. к. Слатина, бл. 21, ап. 72, паспорт: В-0106754, издаден на 12.02.1982 г. от РУ “В. Левски” на МВР, София, ЕГН 4011146400


София, март, 1998 г.

# АНОТАЦИЯ КЪМ ТЕОРИЯТА НА ИНВАРИАНТНИТЕ СИСТЕМИ

Теорията на инвариантните системи за управление или накратко, теорията на инвариантността е съставена като обобщена илюстрация на системите за управление на енергийни процеси в природата и в човешката цивилизация.

Авторът определя понятието инвариантност като естествен стремеж на материята към равновесие. Този и единствено този стремеж, както сочи опитът, е използван и може да се използва от човека за създаване на какъвто и да е производствен процес, който да преобразува суровата материя (суровината) в готов продукт с предварително избрано постоянно качество.

В над 30-годишния си трудов стаж по дипломната си специалност авторът не помни да е търсил помощ от така дълго и трудно изучаваната от него като студент теория на автоматичното управление, която е частен случай от теорията на диференциалните уравнения. Не помни подобна помощ да е търсил и някой негов състудент. Ето защо на дневен ред се появи у автора идеята за качествено нов вид теория на управлението, почиващ не на математични, а на физични понятия подчинени на единната мяра за движение в природата - енергията.

И така, без да отрича истините постигнати чрез теорията на диференциалните уравнения, авторът е съставил научната си разработка под горното заглавие в две части. Първата част е самата теория на инвариантността, а втората - приложенията й.

В първата част авторът:

- съставя енергиен модел на понятието система;
- създава системен механичен модел на понятието енергия чрез нютоновата механика на материална точка;
- съставя алгебра на всички възможни системни енергийни
- равенства, почиващи върху тази механика;
- прави двойнствено алгебрично сравнение между системната механика на материалната точка и енергетиката на каквато и да е система за управление, доказвайки универсалността на

теорията си.

Така създадената теория на инвариантните системи за управление има своя завършен фундаментален вид. Онагледяването й чрез практически приложими и метатеоретични примери е изложено във втората част на разработката.

Във втората част на разработката авторът:

- прилага практически създадената от него теория, доказвайки
- съществуването на инвариантни свойства на материята чрез класическа и квантова механична мяра на понятието енергия;
- използва тези свойства на материята за синтезиране на инвариантни системи за управление;
- посочва граничните условия за съществуване на свойството инвариантност;
- определя понятието устойчивост на система за управление като следствие от условията за съществуване на инвариантност;
- определя необходимостта от аналогово и дискретно управление на система като средство за поддържане на устойчивостта й и за спазване на производствената й програма.

Теорията на инвариантните системи за управление (първата част от разработката) е регистрирана в Агенцията за авторско право в София по молба на автора с входящ номер 2037 от 20 август 1992 г. и авторът е придобил правата си върху нея чрез регистрационния документ Vв-820 от 15 септември 1992 г. Ако по темата, обхващаща теорията, до тази дата не е писано от други лица, научният приоритет на автора има начало от 20.08.1992 г. и, следователно, всичко писано по темата от други автори след тази дата е неоригинално.

Приложенията на теорията (втората част от разработката) са нотариално заверени на 23 април 1998 г. в Софийския градски съд. Ако по тези от тях, които нямат метатеоретичен характер спрямо първата част от разработката, е писано нещо след тази дата от други автори, то е неоригинално

# INVARIANT SYSTEMS THEORY

## SYNOPSIS

The Theory of Invariant Control Systems or in brief Theory of Invariability, is developed as a new viewpoint of Control. Without ignoring the widely spread metaphysical theory studied in almost all Higher schools in the world, the author is basing on the concept of energy as an measure for the existence of the matter and on this ground builds-up his theory considering that it completely covers all possibilities for the movement control of all kinds of material substances.

Basing only on the methodology introduced by Galilee at the end of 16-th century the author makes an assumption for some real evolution of the

Theory of Control and its applications in practice; some of them used by himself. After more then 30 years of control systems projecting he couldn't find such an evolution, neither could apply in practice the theory that he learned as a student, because it is no possible to creat something material if it does not possess material measure. And the only measure in control systems could be the energy and the conditions for its application are conditions for the existence of material invariants.

Under the material invariant the author considers the capability of the material substances to preserve constantly some characteristic features (mass, volume, thermal capacity, electric conductivity etc.) in static or dinamic mode. This capability and the conditions for its existence pre-determine the possibility for creating, by the material substaces, an machine, an engine, an equipment, a vehicle or some kind of means that could be controlled or managed by a preliminary program. The conditions for the invariant existence are prerequisite for the control of the engine created by the substance.

The author uses the modern algebra language in order to describe and prove his thesis. For some readers this is unusual for others - inadmissible. However, everyone having some knowledge and experience in the field of analogue and discrete (digital) technological process could read the text without any difficulties if he/she is not preconceived concerning the author and his way of thinking.

And this way of thinking is being used even by philosophers like B. de Spinoza and I. Kant.

СЪДЪРЖАНИЕ

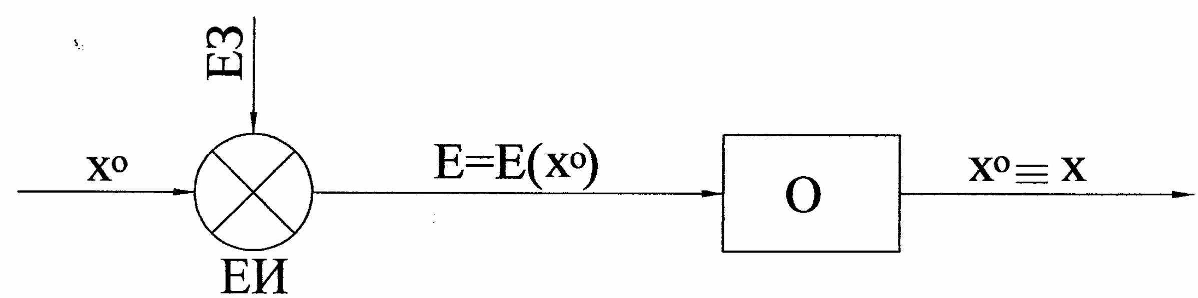
CONTENTS

## ОБЩА ЧАСТ

**Определение О1.** Система е всяко множество, което може да се представи от два елемента, единият от които е енергиен източник, а другият - енергиен потребител или работен обект, който потребява (консумира) енергията на източника, за да произведе някакъв продукт.

Продуктът предварително се избира или еднократно, или периодично по желание на човек. Продуктът може да е веществен или енергиен (поле).

**Определение О2.** Инвариантна е всяка система, която произвежда продукт напълно и по всяко време отговарящ на избрания.




Фиг. 1.

На фиг. 1. е изобразена схемата на инвариантна система. Според означенията:

- О е производствения обект;
- ЕИ - енергийният източник;
- ЕЗ - енергийните запаси за системата;
- $x^{o}$ - избраният (входният) продукт;
- Е - количеството енергия изискано от входния продукт;
- х - произведеният (изходният) продукт.

В случая двойката постоянни елементи ЕИ и О с помощта на променливите ЕЗ, $x^{o}$ и х образуват според определение О1 система .

Системата е инвариантна според определение О2, тъй като условието:

(1) $x \equiv x^o$

е единственото необходимо условие за съществуване на инвариантност в системата. На практика такива системи не съществуват, но съществува стремежът за създаване на системи с минимална или практически пренебрежима във времето t грешка ε, т. е.,

(2) $\varepsilon = \lim (x^o - x) = 0$, при $t \to \infty$

(примерно: радарни системи, при които въртенето на антената се следи синфазно и синхронно от електронен лъч на контролен екран, синхронно въртящи се генератори с еднакъв брой полюси и др.). С други думи, съществуват допустимо неинвариантни системи.

## КРИТЕРИИ ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕ НА ИНВАРИАНТНОСТ

По-горе се спомена условието (1), при което по определение съществува инвариантност в дадена система. Ясно е, че при спазване на необходимото условие (1) можем да кажем, че системата е инвариантна.

Кога може да се спази условието (1)? На какви условия трябва да отговарят параметрите (характеристиките на постоянните елементи) на системата, за да се спази условието (1)?

Отговорите на тези въпроси можем да наречем "достатъчни условия за съществуване на инвариантност". Кои са тези условия?

**Определение О3.** Ще раличаваме три вида енергия:

Ен = Ен($x^o$)- действително необходимата за обекта енергия;

Ек = Ек(x)- действително консумираната от обекта енергия;

Еи - действително подаваната от източника към обекта енергия;

**Определение О4.** Посока на енергията ще наричаме посоката на движението й по направлението "източник-консуматор".

**Аксиома А1.** Наблюдателят на енергийното движение е "стъпил" на преносната линия между източника и консуматора (обекта).

**Аксиома А2**. Точката за наблюдение се приема за енергийно равновесна (неутрална), т. е., в нея не може нито да се консумира, нито да се генерира енергия.

**Аксиома А3.** Положителна се приема посоката на енергията сочеща от наблюдателя, отрицателна - към наблюдателя.

**Аксиома А4.** Алгебричният знак плюс сочи положителна посока на енергията, а минус - отрицателна.

**Аксиома А5.** Върху множеството енергийни стойности са валидни комутативно операциите събиране и изваждане. Всички останали алгебрични операции върху това множество водят до резултати вън от енергийното множество.

**Аксиома А6.** Променливите величини $x^o$ и x са в най общия случай съставни функции на времето t, което се измерва по календар.

**Аксиома А7.** Енергийната съставка Ен е управляваща и има единствено математичен, а не физичен смисъл.

**Теорема Т1.** Множеството енергийни стойности образуват адитивна група.

Доказателство: Според аксиома А4 всеки елемент от енергийното множество има своя обратен, а според аксиома А2 в същото множество съществува единичен елемет - нулата (равновесното състояние на системата). Аксиома А5 допуска единствено адитивни алгебрични операции върху енергийното множество, които са комутативни. От всичко това излиза, че аксиомите А2, А4 и А5 са аксиоми на адитивна група, с което теоремата е доказана.

**Теорема Т2.** Функциите $x^o(t)$, $x(t)$, $Ен(x^o)$, $Еи(x^o)$ и $Ек(x)$ са изоморфни.

Доказателство: Според аксиома А6 $x^o$ и x са съставни функции на времето t. Щом това е така, те са еднозначни, защото нищо не може да е едновременно на две места и обратими, защото времето t е календарно.

Тогава според определение О1 и схемата на фиг. 1 са в сила диаграмите:

(3) $t \dashrightarrow x^o \dashrightarrow Ен(x^o)$, $t \dashrightarrow x^o \dashrightarrow Еи(x^o)$ и $t \dashrightarrow x \dashrightarrow Ек(x)$,

а това значи, че и функциите Ен($x^o$), Еи($x^o$) и Ек(x) са съставни функции на времето t. С други думи, можем да напишем, че:

(4) Ен = Ен(t), Еи = Еи(t) и Ек = Ек(t)

Това от своя страна значи, че енергийните стойности не могат едновременно да са повече от една. С други думи, са в сила диаграмите:

(5) Ен($x^o$)-->t, Еи($x^o$)-->t и Ек(x)-->t,

с което теоремата е доказана.

**Теорема Т3.** Системата на фиг. 1. е инвариантна тогава и само тогава, когато

(6) Ен($x^o$) = Ек(x).

Доказателство: Наличието на инвариантност изисква спазването на условието (1). От друга страна, според теорема Т2 функциите Ен($x^o$) и Ек(x) са изоморфни. Тогава е в сила комутативната функционална диаграма:

(7) t-->$x^o$-->Ен($x^o$)-->Ек(x)-->x-->t

При верността на диаграмата (7) условието (1) води до условието (6) или по-точно до диаграмата:

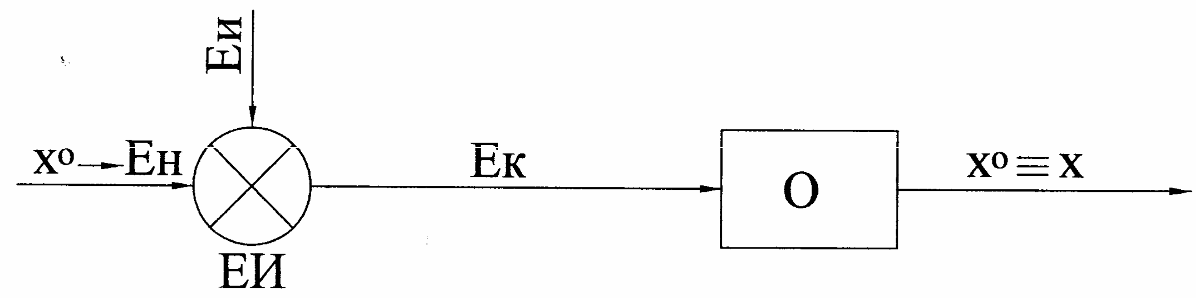
(8) $x^o$ = x-->Ен($x^o$) = Ек(x),

с което теоремата е доказана.

**Теорема Т4.** Множеството енергийни функции отнасящо се до инвариантната система на фиг. 1 образува спрямо времето t симетрична спрямо абсцисната ос диаграма.

Доказателство: Множеството енергийни функции според теорема Т1 образува адитивна група. От това следва, че всяка енергийна стойност се счита за елемент събираем с една от трите енергийни съставки на системата - Ен, Ек и Еи.

Според аксиома А3 и А4 Ен и Еи имат отрицателни стойности, а Ек положителна. Включвайки и неутралната енергийна (наблюдателна) точка от аксиома А2 в съждението ни, можем да изобразим схемата на инвариантната система във вида:



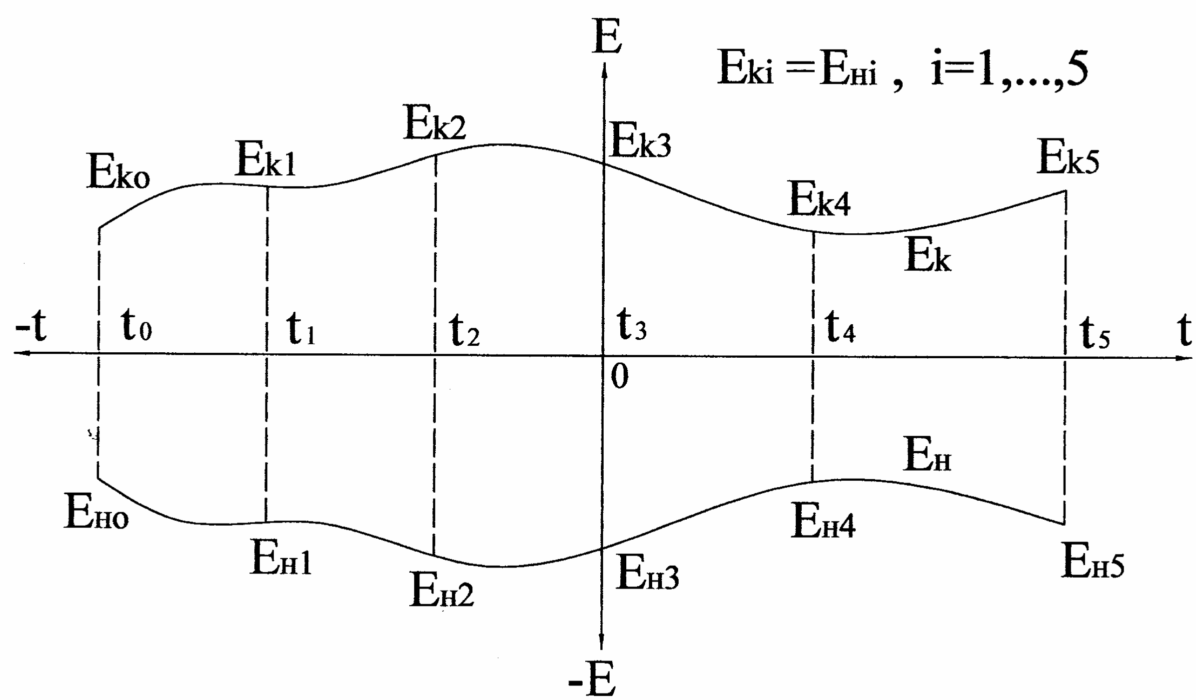

Фиг. 2.

От фиг. 2, използвайки общата абсцисна ос t, нагледно можем да начертаем графиките Ен(t), Еи(t) и Ек(t).

Според аксиома А8 енергийната съставка Ен има само управляващ или математичен смисъл. Тя съобщава на енергийния източник каква енергия е необходима на обекта, за да бъде той в режим на инвариантност. Ясно е, че е необходимо условието:

(9) Ен(t) = Еи(t)

Понеже Ен(t) и Еи(t) имат еднакъв - отрицателен - алгебричен знак спрямо неутралната точка, кривите им (вж. фиг. 3) ще бъдат под абсцисната ос и ще съвпаднат.




Фиг. 3.

От друга страна кривата Ек(t) поради положителния знак на Ек ще бъде над абсцисната ос, а поради необходимостта на условието (6) ще бъде симетрична на кривите Ен(t) и Еи(t) спрямо абсцисната ос.

С това теоремата е доказана.

## МЕХАНИЧЕН МОДЕЛ НА ПОНЯТИЕТО ЕНЕРГИЯ

Достатъчното за съществуване на инвариантност условие (6) за системата на фиг. 1 изисква да уточним физически понятието енергия, за да можем да определим динамичните свойства на инвариантните системи. С други думи, е необходимо да знаем всички допустимо възможни изменения във времето на енергийните съставки Ен (респективно, Еи) и Ек.

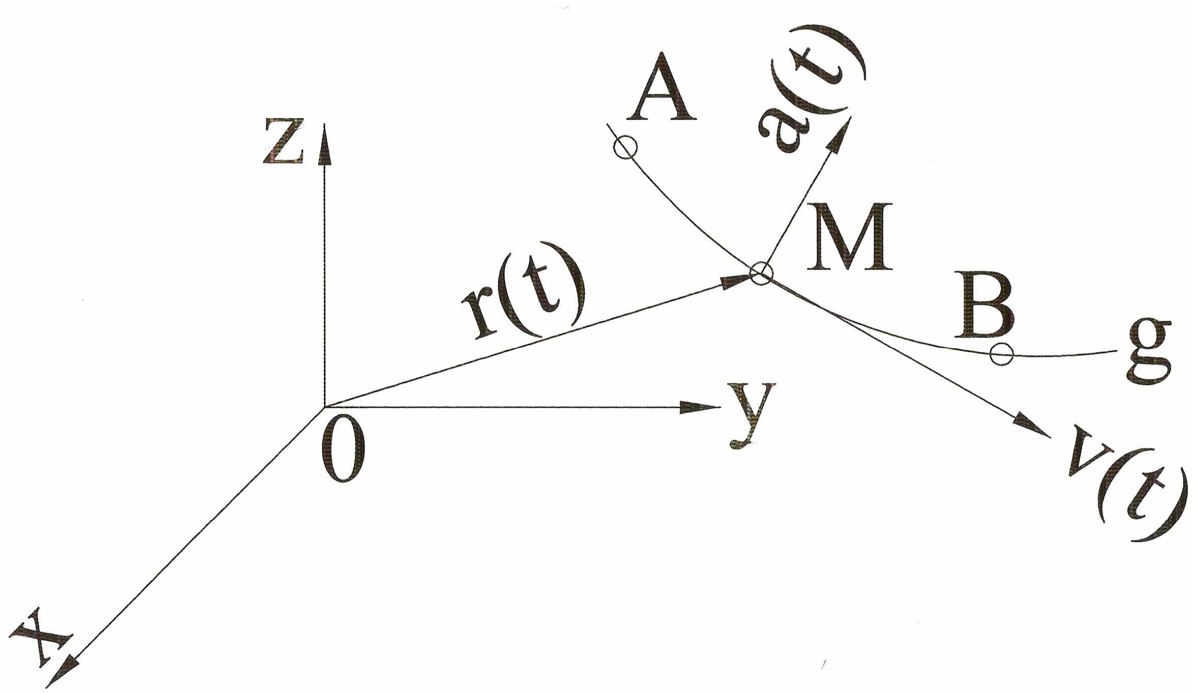
На понятието енергия ще погледнем като на единна мяра на различните форми на движение на материята. Ако материята съществува само в движение, енергията ще бъде всеобща мяра за съществуване на материята. Тогава всеки вид движение или физично явление ще притежава енергийна мяра и всички видове енергия (механична, топлинна, електромагнитна, химична, ядрена и др.) е логично да се измерват с една и съща мерна единица. Тя се нарича джаул, бележи се с J и е международно възприета в измервателната система SI. Всички измервателни стандарти в света са задължително съобразени с тази система и ние също ще се съобразяваме с нея в по-нататъшните си съждения.

Щом всички физични явления имат единна енергийна мяра, такава мяра ще има всеки производствен процес и, следователно, всяка производствена система, в това число и инвариантната. Ето сега ни е ясно защо определението О1 за система и О2 - за инвариантна система са определения за енергийна система.

Най-елементарното за наблюдаване движение, както е показал опитът, е механичното. Точно затова е прието то да бъде обща гледна точка за всеки друг вид (топлинно, електромагнитно, химично, ядрено и др.) движение.

Най-елементарното за наблюдаване механично движение е движението на материална точка, защото точката е най-елементарното пространствено понятие за човешкото въображение. Точно затова най-елементарните от математична гледна точка енергийни функции, както ще видим по-долу, ще бъдат функциите описващи динамичните промени на енергията при движение на материална точка и всички други видове възможни за съществуване енергийни функции (топлинни, електромагнитни, химични, ядрени и др.) ще бъдат следствие от тях.

Нека приемем производственият обект да бъде материална точка, която консумира енергия, за да се движи.




Фиг. 4.

**Аксиома Е1.** Съществува поне едно евклидово пространство Е(3) еднозначно определено от неподвижната координатна система (O, x, y, z)

**Аксиома Е2.** В пространството Е(3) съществуват поне две неинцидентни точки А и В (вж. фиг. 4).

**Аксиома Е3.** В пространството Е(3) съществува поне една траектория g непрекъсната между точките А и В.

**Аксиома Е4.** В пространството Е(3) съществува поне една материална точка М неидентична с А и В с маса m измервана в килограми kg.

**Аксиома Е5.** Точката М се движи по траекторията g и за времето t измервано в секунди (s) по календара изминава между точките А и В пътя s измерван в метри (m).

**Теорема Т5.** Скоростта v = ds/dt на точката М измервана в метри за секунда (m/s) съществува и е непрекъсната фукция на времето t при движението ѝ по целия път между точките А и В.

Доказателство: Според аксиомата Е5 съществува функцията s(t). Според аксиомата Е3 тя е непрекъсната по цялата дължина s на дъгата между точките А и В. Като функция на времето s(t) е еднозначна. Тогава производната ѝ v = ds/dt съществува и е също еднозначна. В сила е диаграмата:

(10) t-->s(t)-->v = ds/dt

Поради календарната мяра на времето t, диаграмата (10) е и обратима. Следователно можем да я продължим до вида:

(11) t-->s(t)-->v = ds/dt-->t

Видът на диаграмата (11) говори за наличие на изоморфизъм между функциите v(t) и s(t). Следователно, от непрекъснатостта и еднозначността на s(t) следва еднозначността и непрекъснатостта на v(t).

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т6.** Ускорението a = dv/dt на точката М измервано в метри за секунда на секунда (m/s2) е непрекъсната фукция на времето t при движението ѝ по целия път между точките А и В.

Доказателство: Според теоремата Т5 съществува функцията v(t). Пак според теоремата Т5 тя е непрекъсната през цялото време t, за което точката М изминава дължина s на дъгата между точките А и В. И отново според теоремата Т5 v(t) е еднозначна. Тогава производната ѝ a = dv/dt съществува и е също еднозначна. В сила е диаграмата:

(12) t-->s(t)-->v(t)-->a = dv/dt

Поради календарната мяра на времето $t$ диаграмата (12) е и обратима.

Следователно можем да я продължим до вида:

(13) $t \text{-->} s(t) \text{-->} v(t) \text{-->} a = dv/dt \text{-->} t$

Видът на диаграмата (13) говори за наличие на изоморфизъм между функциите $a(t)$ и $v(t)$. Следователно, от непрекъснатостта и еднозначността на $v(t)$ следва еднозначността и непрекъснатостта на $a(t)$.

С това теоремата е доказана.

**Аксиома Е6.** Скоростта $v(t)$ на точката М достига стойности много по-малки от скоростта на светлината (300 000 000 m/s).

**Аксиома Е7.** По целия си път $s$ точката М среща съпротивителната сила $f$ измервана в нютони (N).

**Аксиома Е8.** Съпротивителната сила $f$ представлява векторен сбор от съставките си $f_s$, $f_v$ и $f_a$ измервани в нютони (N), които са пропорционални и колинеарни съответно на пътя $s$, скоростта $v$ и ускорението $a$.

**Теорема Т7.** Функциите $s(t)$, $v(t)$ и $a(t)$, както и линейно-пропорционалните им функции $f_s$, $f_v$ и $f_a$ са интегрируеми в смисъла на Риман.

Доказателство: Според диаграмата (13) функциите $s(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ са изоморфни помежду си. Тогава и функциите:

(14) $f_s(t) = As(t)+B$, $f_v(t) = Cv(t)+D$ и $f_a(t) = Ea(t)+F$,

където A, B, C, D и F са константи (вж. аксиома Е8), са изоморфни съответно спрямо $s(t)$, $v(t)$ и $a(t)$. От това следва, че ако в момента $t_o$ материалната точка М съвпада с точката А (вж. фиг. 4), а в момента $t$ - с точката В, то поради непрекъснатостта си в този интервал и шестте горепосочени функции са интегрируеми в интервала $(t_o,t)$ в римановия смисъл. С други думи, в сила са интегралите:

(15) $$\int_{t_0}^{t} s(t)dt, \quad \int_{t_0}^{t} v(t)dt, \quad \int_{t_0}^{t} a(t)dt,$$

$$\int_{t_0}^{t} fs(t)dt, \quad \int_{t_0}^{t} fv(t)dt, \quad \int_{t_0}^{t} fa(t)dt,$$

с което теоремата е доказана.

**Теорема Т8.** Съществуват риман-стилтесовите интеграли:

(16) $$\int_{t_0}^{t} s(t)ds(t), \quad \int_{t_0}^{t} v(t)dv(t), \quad \int_{t_0}^{t} a(t)da(t),$$

Доказателство: То следва непосредствено от диаграмата (13) и теоремата Т7. Щом между функциите s(t), v(t) и техните производни съществува изоморфизъм и самите те са интегрируеми по Риман, е ясно, че интегралите (16) съществуват.

**Теорема Т9.** Съществуват в римановия смисъл скаларните произведения:

(17)

$$\int_{t_0}^{t} v(t)s(t)dt, \quad \int_{t_0}^{t} v(t)v(t)dt, \quad \int_{t_0}^{t} v(t)a(t)dt,$$

на векторите v(t) и s(t), v(t) и v(t), v(t) и a(t).

Доказателство: Щом според теорема Т8 съществуват интегралите (16), решенията им могат да имат и недовършения (от някои гледни точки) вид (17).

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т10.** Векторите s(t), v(t) и a(t) принадлежат на пространството L2 от функции с интегрируем в смисъла на Лебег квадрат.

Доказателство: Според аксиома Е4 точката М е определена еднозначно от вектора r (вж. фиг. 4) в пространството Е(3). Поради това, дължината на пътя s изминат от точката М се определя от формулата:

(18) $$s = ((x-xo)^2+(y-yo)^2+(z-zo)^2)^{1/2},$$

където с x, y и z бележим координатите на точката М, а с xo, yo и zo- координатите на точката А. Големината на скоростта на точката М се определя от формулата:

(19) $$v = ((dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2)^{1/2}.$$

където с x, y и z бележим производните по времето на x, y и z. По подобна на (19) формула се определя и ускорението a на точката М, а именно:

(20) $$a = ((dx^2/dt^2)^2 + (d^2y/dt^2)^2 + (d^2z/dt^2)^2)^{1/2}.$$

където с x, y и z бележим производните по времето на x, y и z. С други думи, формулите (18) и (19) (респ. (20)) се подчиняват на понятията разстояние между две точки и норма (големина) на вектор в пространството Е(3).

От друга страна, функциите s(t), v(t) и a(t) според теремата Т9

притежават интегрируем в римановия смисъл квадрат. Щом това е така, в този смисъл са интегрируеми и скаларните им компоненти x, y and z, dx/dt, dy/dt and dz/dt, $d^2x/dt$, $d^2y/dt$ and $d^2z/dt$.Но всяка интегрируема по Риман функция е интегрируема и според Лебег или

(21) $$R2 = L2,$$

където R2 и L2 са пространствата на векторните функции с интегрируем квадрат, съответно, по Риман и Лебег.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т11.** Квадратът на векторните функции s(t), v(t) и a(t) е интегрируем в смисъла на Лебег в безкрайни граници.

Доказателство: В Теорема Т7 бе прието, че точката М се намира в момента $t_o$ в точка А, а в момевнта t - в точка В и по този начин бе определен интеграционният интервал на функциите s(t), v(t) и a(t).

Ако разширим интервала $(t_o,t)$ до интервала $(-\infty, \infty)$,

ограничавайки движението на точката М единствено между точките А и В,римановите интеграли:

(22)
$$\int_{t_0}^{t} s(t)dt, \qquad \int_{t_0}^{t} v(t)dt, \qquad \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

ще се трансформират в интегралите:

(23)
$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} a(t)dt.$$

които ще бъдат сходящи лебегови интеграли с безкрайни граници.

С това теоремата е доказана.

Теорема Т12. Интегралите (23) са абсолютно сходящи.

Доказателство: Щом векторните функции s(t), v(t) и a(t) са интегрируеми в смисъла (23), интегрируеми са в този смисъл и модулите им (абсолютните им стойности), с което теоремата е доказана.

**Теорема Т13.** Казаното в теоремите Т8,...,Т12 за функциите s(t), v(t) и a(t) е в сила, съответно и за функциите $f_s(t)$, $f_v(t)$ и $f_a(t)$.

Доказателство: То идва като следствие от теорема Т7. Функциите s(t) и $f_s(t)$, v(t) и $f_v(t)$, a(t) и $f_a(t)$ са линейно-пропорционални и изоморфни помежду си и следователно притежават необходимите общи свойства.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т14.** Скаларното произведение на функциите v(t) и f(t):

$$(24) \qquad \langle v(t),f(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)f(t)dt$$

съществува.

Доказателство: Според теорема Т10 функциите v(t) и f(t) са с интегрируем в смисъла на Лебег квадрат, т. е., принадлежат на пространството L2. Съществуването на скаларно произведение е едно от свойствата на това пространство.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т15.** Съществуват:

нормата на вектора v(t):

$$(25) \qquad |v(t)| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t)^2 dt\right)^{1/2};$$

единичният вектор:

$$(26) \qquad v^0(t) = v(t)/|v(t)|;$$

разстоянието между векторите $v_1(t)$ и $v_2(t)$:

$$(27) \qquad d = |v_1(t) - v_2(t)|.$$

Доказателство: Изброените равенства (25), (26) и (27) представляват свойства на пространството L2.

С това теоремата е доказана.

**Аксиома Е9.** Скаларното произведение:

$$(28) \qquad \langle v(t),f(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)f(t)dt = E$$

на векторите v(t) и f(t) определя консумираната от точката М енергия необходима за движението й по траекторията g. Енергията се измерва в джаули (J).

**Аксиома Е10.** Производната:

$$(29) \qquad S = dE/dt$$

на скаларното произведение (28) на векторите v(t) и f(t) определя консумираната от точката М мощност необходима всеки момент за движението й по траекторията g. Мощността се измерва във ватове (W).

## ЕНЕРГИЙНА АЛГЕБРА. ПЪРВА ЧАСТ

С излагането на аксиомите Е1,...,Е10 бе изграден механичен модел на понятието енергия, а с доказването на теоремите Т5,...,Т15 се определи необходимият математичен апарат за изграждането на модела. Този апарат е достатъчен за изчисляването на енергийния баланс на движещата се точка М. Той, обаче не е достатъчен, за да определи енергийният баланс на една каквато и да е система. За постигането на тази цел е необходимо да се изгради двойнствено подобие между механичния модел и останалите видове енергийни (топлинен, електромагнитен, химичен, ядрен и др.) модели. Това може да се извърши на алгебрична основа.

Ако изградим алгебричната структура (алгебрата) Ω такава, че множеството операции Ω, преобразуващи множеството А в енергийното множество Е, т. е.:

$$\Omega$$

(30) $\quad A: (o) \text{--->} E$

да е валидно едновременно за векторите $f_s$, $f_v$ и $f_a$, а чрез тях и за равенствата (28) и (29), изграденият механичен модел ще бъде двойнствено подобен за всички видове енергийни модели. Тогава ще могат да се изградят общите критерии за оценка на всяка енергийна система, в това число и критерият за инвариантност.

Преди, обаче да пристъпим към алгебричните свойства на равенствата (28) и (29), нека да изоставим замалко понятието пълна инвариантност и да въведем някои критерии за нейното нарушаване.

**Определение О5.** Ефективни стойности на функциите v(t) и f(t) представляват величините:

(31) $$V(t) = \left(d/dt\left(\int_o^t v(t)^2 dt\right)\right)^{1/2} \quad \text{и}$$

$$F(t) = \left(d/dt\left(\int_o^t f(t)^2 dt\right)\right)^{1/2} .$$

Равенствата (31) представляват всъщност обратни преобразувания на квадратите на големините (нормите) на векторните функции v(t) и f(t) в пространството L2. Ако сравним равенствата (31) с равенството (28) и (29) ще видим, че произведението:

(32) $\quad V(t)F(t) = S(t)$

представлява консумираната от точката М мощност при условие, че v(t) и f(t) са постоянни величини. С други думи, постоянните стойности на големините на векторите v(t) и f(t) определят постояннство на ефективните им стойности, а чрез него и постоянство на консумираната от източника мощност. Обратно, всяка една промяна на големините на векторите v(t) и f(t) води до промяна на ефективните им стойности, а чрез нея и промяна на консумираната от източника мощност. При това условие определението за инвариантна система О2 става равностойно на следните по долу:

**Определение О6.** Инвариантна е всяка система, която произвежда продукт с ефективни стойности на параметрите му напълно и по всяко време отговарящи на избраните.

**Определение О7.** Инвариантна е всяка система, която при неизменен избор на параметрите на изходния й продукт запазва постоянни ефективните стойности на тези параметри.

Нека си поставим въпроса: "В кои случаи ефективната стойност на векторните функции v(t) и f(t) остава постоянна и в кои се променя?" Или по-точния въпрос: "Какво е съотношението на продължителността по време на постоянство и промяна на ефективните стойности на векторните функции v(t) и f(t) в даден енергиен процес?"

Ако става дума за производствен, потребяващ енергия процес, който се подчинява на обществени изисквания, опитът е установил, че производствените програми остават постоянни за продължителни периоди така, че всеки преход служи за промяна от една постоянна програма към друга. Не се оправдава икономически преходният процес да е съизмерим по време с продължителния процес.

Така ли е в природата?

Никой не може да вникне в дълбочината на целия безкрай от размерите на атома до вселената. Знае се, обаче, че вселената е единна и елементи вън от таблицата на Менделеев не съществуват. От незапомнени времена планетите от различните системи, в това число и Слънчевата се въртят неизменно по кеплерови орбити. Полярната звезда неизменно - само с един градус грешка - сочи истинския север, и т. н.

Значи има в природата за нас - простосмъртните вечни неща.

Но, от друга страна, уранът се разпада бавно и сигурно до олово. Слънцето извършва ядрени взривове и поради това му се предсказва, че след няколко милиарда години ще угасне. На разстояния спрямо нас измервани в светлинни години се взривяват и разпадат т. н. неустойчиви звезди.

Значи има в природата за нас - простосмъртните и невечни неща.

Кое, обаче, е повече - вечното или невечното?

И за да запазим мислите си от необратим патологичен хаос, нека не водим намирисващи на инквизиционен съд средновековни спорове и да приемем благоразумната:

**Аксиома E11.** Всеки енергиен преход в природата е насочен от едно постоянно равновесно състояние към друго като времето за прехода е несъразмерно по-малко от времето на равновесието.

**Теорема T16.** Всяка инвариантна система може да излизне от състоянието си на инвариантност за краткотрайни моменти несъразмерно по-малки от моментите на инвариантност.

Доказателство: То следва непосредствено от аксиома E11. Всяка

промяна в системата породена от пускане, спиране или зададен нов избор на изходните параметри на самата система ще представлява кратковременен преход с по-голямо или по-малко нарушение на инвариантността.

**Теорема T17.** Енергийният баланс в състояние на преход на движението на материалната точка M може да се изрази еднозначно чрез използване на фуриеров интеграл.

Доказателство: Състоянието на преход според теорема T16 е краткотрайно и, следователно, непериодично явление. От друга страна, според теорема T12 векторните функции v(t) и f(t) са интегрируеми абсолютно в лебеговия смисъл в безкрайни интервали. Това значи, че v(t) и f(t) могат да се представят във вида:

$$(33) \qquad v(t) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} V(i\Omega)\exp(i\Omega t)d\Omega \qquad \text{и}$$

$$f(t) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} F(i\Omega)\exp(i\Omega t)d\Omega,$$

където с i бележим имагинерната единица, а с Ω - реално число, притежаващо физическото качество на честота, поради което се измерва в радиани за секуннда (rad/s) или (s-1). V(iΩ) и F(iΩ) са фуриеровите образи на v(t) и f(t), съответно:

$$(34) \qquad V(i\Omega) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\exp(-i\Omega t)dt \qquad \text{и}$$

$$F(i\Omega) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\Omega t)dt \ .$$

Като се има предвид още равенството (28) и, че според теоремата на Парсевал:

$$(35) \qquad \langle v(t),f(t)\rangle = \langle V(i\Omega),F(i\Omega)\rangle = E,$$

става напълно ясно, че енергийният баланс на преходното състояние на движението на точката M е напълно еднозначно определено при използването на фуриеровия интеграл.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т18.** Енергийният баланс в равновесно (инвариантно) състояние на движението на материалната точка М може да се изрази еднозначно чрез използване на фуриеров ред.

Доказателство: Инвариантното състояние според аксиома Е11 е несъизмеримо по-дълго спрямо преходното. Това ни дава право да пренебрегнем преходните интервали на времето и да си представим, че точката М за нас се е движела инвариантно от незапомнени времена, т. е., в интервала (-∞, ∞). С други думи в интервала (-∞, ∞). векторните функции v(t) и f(t) притежават постоянни ефективни стойности. Ако си представим тези функции разложени във фуриеровите редове:

$$(36)\qquad v(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} v_k(ik\Omega) \qquad \text{и}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k(ik\Omega)$$

където k = -∞ ,...,-2, -1, 0, 1, 2,..., ∞, са фуриеровите коефициенти:

$$(37)\qquad v_k = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\exp(ikt)dt \qquad \text{и}$$

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(ikt)dt,$$

които не зависят от времето t, ще съществуват, защото векторните функции v(t) и f(t) са интегрируеми абсолютно в лебеговия смисъл в безкрайни интервали. В такъв случай ще можем да изразим скаларното произведение на векторните функции v(t) и f(t) във вида:

$$(38) \qquad \langle v(t),f(t)\rangle = \langle \sum_{-\infty}^{\infty} v_k \exp(ik\Omega), \sum_{-\infty}^{\infty} f_k \exp(ik\Omega)\rangle$$

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т19.** Цялата енергия консумирана в равновесно (инвариантно) състояние на движението на материалната точка М се изчислява по формулата:

$$(39) \qquad E_P = (\sum_{-\infty}^{\infty} V_k F_k \cos\varphi_k)t$$

където: $V_k$ и $F_k$ са ефективните стойности на k-тия хармоник на векторните функции v(t) и f(t), а $\varphi_k$ - фазовата разлика между тях.

Доказателство: Ако доразвием дясната страна на равенството (38), опирайки се на понятието скаларно произведение в пространството L2, ще достигнем до вида:

$$(40) \qquad \langle v(t),f(t)\rangle = \int_{o}^{t} (\sum_{-\infty}^{\infty} v_k \exp(ik\Omega t)\cdot\sum_{-\infty}^{\infty} f_k \exp(ik\Omega t))dt$$

При наличие на условието (36) интеграционният интервал (0, t) се преобразува в интервала (0, 2kΩ), т. е., времето t се приема кратно на 2kΩ-интервала. Тогава векторните функции v(t) и f(t) ще образуват ортогонална база в пространството L2, което значи, че:

$$(41) \qquad \langle v(t),f(t)\rangle = \int_{o}^{t} (\sum_{-\infty}^{\infty} v_k \exp(ik\Omega t)\cdot\sum_{-\infty}^{\infty} f_{k+1} \exp\text{-}i(k+1)\Omega t))dt = 0$$

Това означава, че скаларното произведение (40) ще се сведе до сума от произведения на $v_k$ и $f_k$ с еднакви индекси, отговаряща на окончателния вид на теоремата на Парсевал за фуриеров ред:

$$(42) \qquad \langle v(t),f(t)\rangle = \int_o^t \left(\sum_{-\infty}^{\infty} v_k f_k\right)dt$$

Според условието (37) $v_k$ и $f_k$ представляват комплексни числа.

Нека ги представим в експоненциалния им вид:

$$(43) \qquad v_k = |v_k|\exp(i\delta_k) \text{ and } f_k = |f_k|\exp(i\theta_k),$$

където $\delta_k$ и $\theta_k$ са константи с качеството на време, т. н. начални фази на периодично променящите се k-ти хармоници на векторните функции v(t) и f(t). Ако заместим стойностите на $v_k$ и $f_k$ от равенството (43) в равенството (42), ще получим:

$$(44) \qquad \langle v(t),f(t)\rangle = \int_o^t \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |v_k|\exp(i\delta_k)\cdot|f_k|\exp(i\theta_k)\right)dt =$$

$$= \int_o^t \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |v_k|\cdot|f_k|\exp(i\varphi_k)\right)dt\ ,$$

където $\varphi_k = \theta_k - \delta_k$ е фазовата разлика между споменатите по-горе поредни хармоници. Ако сега пък представим:

(45) $$\exp(i\varphi_k) + \exp(-i\varphi_k) = 2\cos\varphi_k$$

и го заместим в крайния резултат от равенстното (44), скаларното произведение (44) ще придобие вида на трансформираната интегрална сума:

(46) $$<v(t),f(t)> = 2\int_o^t (\Sigma|v_k|\cdot|f_k|\cos\varphi_k)dt$$

И ако изчислим по формулите (31) ефективните стойности на k-тите поредни хармоници $V_k$ и $F_k$ на векторните функции v(t) и f(t):

(47) $$V_k = (d/dt(\int_o^t (v_k\exp(ik\Omega t)+ v_k\exp(-ik\Omega t))^2dt))^{1/2} \text{ и}$$

$$F_k = (d/dt(\int_o^t (f_k\exp(ik\Omega t)+ f_k\exp(-ik\Omega t))^2dt))^{1/2} ,$$

след преобразуване на комплексните подинтегрални функции в тригонометричния вид:

(48) $$V_k(t) = 2|v_k| \cos(k\Omega t+\delta_k) \quad \text{и}$$

$$F_k(t) = 2|f_k| \cos(k\Omega t+\theta_k) .$$

и пресмятане на интегралните равенства (47), ще стигнем до извода, че тези ефективни стойности са, съответно:

(49) $V_k = 2|v_k|/\sqrt{2}$ and $F_k = 2|f_k|/\sqrt{2}$

Отбелязвайки непосредствено от тригонометричния вид (48), че модулите на k-тите хармоници на векторните функции v(t) и f(t) са два пъти по големи от модулите на съответните им експоненциални съставки, чрез формулата (49) можем да кажем, че ефективните им стойности са:

(50) $V_k = V_k(t)/\sqrt{2}$ and $F_k = F_k(t)/\sqrt{2}$.

а това е резултат добре познат от теоретичната електротехника, само че вместо скорост трябва да разбираме несинусоиден (деформиран) ток, а вместо сила - несинусоидно напрежение.

Е, нека се върнем сега към равенството (46). Ако заменим в него модулите на фуриеровите експоненциални съставки с ефективните стойности на хармониците от равенството (49) и решим интеграла, ще получим точно равенството (39). Това също е резултат добре познат от теоретичната електротехника.

С това теоремата е доказана.

**Определение О8.** Изчисляваната по равенствата (39), (42), (44) и (46) енергия $E_P$ се нарича активна енергия, защото е еднозначна мяра за действие (активност) на всеки синусоиден енергиен източник.

Забележка: Определението е възприето в електротехниката като стандартен термин.

**Теорема Т20.** В преходен режим съпротивителната сила $f_s(t)$ на точката М, която е пропорционална на изминатия от нея път, закъснява с $\pi/2$ радиана по фаза спрямо скоростта й v(t), а пропорционалната на ускорението й сила $f_a(t)$ - изпреварва по фаза скоростта също с $\pi/2$ радиана. В режим на постоянство (инвариантен режим) същото поведение имат съответните k-ти поредни хармоници без нулевия хармоник.

Доказателство: В преходен режим скоростта на точката М се определя по равенството (33). Ако го диференциаме по времето t, имайки предвид, че имагинерната единица i се представя във вида:

(51) $i = \exp(\pi /2)$ и $-i = \exp(-\pi /2)$,

ще получим:

(52) $$\frac{d}{dt}(v(t)) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \Omega V(i\Omega)\exp(i\Omega t+ \pi /2)d\Omega$$

В режим на постоянство скоростта на точката М се определя по равенството (36). Ако го диференциаме по времето t, ще получим:

(53) $$\frac{d}{dt}(v(t)) = \sum_{-\infty}^{\infty} k\Omega v_k \exp(ik\Omega v_k t+ \pi /2)$$

Тук нулевият хармоник на v(t) отсъствува, защото производната му по времето t е нула.

Ако сега пък интегрираме по времето t равенствата (33) и (36), ще получим равенствата:

(54) $$\int_{o}^{t} v(t)dt = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} V(i\Omega)(\exp(i\Omega t- \pi /2)/ \Omega)d\Omega\Big|_{o}^{t}$$ и

$$\int_{o}^{t} v(t)dt = \sum_{-\infty}^{\infty} v_k(\exp(i(k\Omega t- \pi /2)))/k\,\Omega \Big|_{o}^{t}, \quad k \neq 0.$$

Тук нулевият хармоник е изключен от второто равенство, защото модулът му vk/kк става безкрайно голям при k = 0.

Равенствата (52) и (53) определят според аксиома E8 и теорема T6 сила пропорционална на ускорението на точката M, а равенствата (54) според аксиома E8 и теорема T5 - сила пропорционална на изминатия от точката път. Изразите:

(55) $\exp(i\,\Omega\, t+ \pi /2)$ and $\exp(ik\,\Omega\, t+ \pi /2)$

сочат недвусмислено в равенствата (53) изпреварване по фаза с $\pi/2$ радиана спрямо векторната функция v(t), а изразите:

(56) $\exp(i\,\Omega\, t- \pi /2)$ and $\exp(ik\,\Omega\, t-\pi /2)$

в равенствата (54) - за закъснение със същото време.

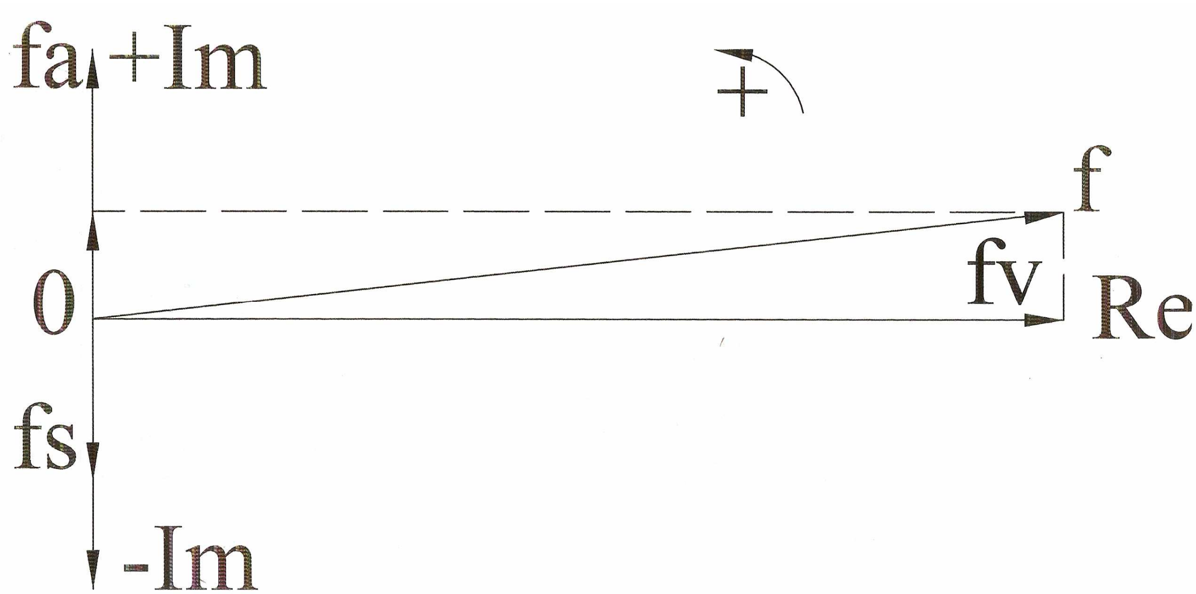
С това теоремата е доказана.

**Теорема T21.** Векторните функции $f_s$, $f_v$ и $f_a$ образуват в преходен режим на движение на точката M двумерното линейно пространство F(2).

Доказателство: Според аксиома E8 и теорема T20 силите fs и fa се намират в състояние на противофаза, т. е., резултантната им сила fr е равна на алгебричния им сбор:

(57) $f_r = f_a - f_s$

(вж. равенствата (52) и (53) сравнени с равенствата (54)). От друга страна, пак според теорема T20 силата $f_v$ изостава по фаза спрямо силата $f_a$ с $\pi/2$ радиана и изпреварва със същото време силата $f_s$. С други думи, ако изобразим на фигурата по-долу повременната векторна диаграма:




Фиг. 5.

ще видим, че резултантната сила $f_r$ образува със силата $f_v$ прав ъгъл.

Нека видим това по-точно.

Да довършим диференцирането по времето t под интегралния знак на равенството (52) и интегрирането по времето t под интегралния знак на първото от равенствата (54). Ще получим:

(58) $$\frac{d}{dt}(v(t)) = (i/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \Omega\, V(i\,\Omega)\exp(i\,\Omega\, t)d\,\Omega$$ и

(59) $$\int v(t)dt = -(i/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \Omega\, V(i\,\Omega)\exp(i\,\Omega\, t)d\,\Omega$$

Първото равенство и тук определя силата $f_a(t)$, а второто - силата $f_s(t)$. Последният член от равенството (59) не зависи от времето t и, следователно представлява статична или постоянна съставка на силата $f_s$ и не участвува в преходния процес на движението на точката М. Това е стойността на силата $f_s$ при $t = 0$, т. е, в началото на преходния процес. Нека я означим с $f_{so}$ и за простота да я приравним на нула, приемайки че сме транслирали по f координатната система fOt и сме се върнали към предишните означения. Резултантната динамична сила на преходния процес предвид равенството (57) ще бъде:

$$(60) \qquad fr(t) = (1/\sqrt{2}\pi)\int_{-\infty}^{\infty} (\Omega - 1/\Omega)V(i\Omega)\exp(i\Omega t + \pi/2)) d\Omega$$

Комплексните векторни функции (33) и (60) имат безспорно ралични модули и аргументи. Но за тях можем да напишем равенствата:

$$(61) \qquad |fr(t)| = (\Omega - 1/\Omega)|v(t)|) \quad \text{и}$$

$$\arg(fr(t)) = \arg(v(t)) + \pi/2.$$

Равенствата (61) повторно доказват верността на диаграмата на фиг. 5. Това значи, че квадратът на векторния сбор на силите fr и fv е

$$(62) \qquad |f(t)|^2 = |f_r(t)|^2 + |f_v(t)|^2$$

А щом билинейната форма на равенството (62) е нула, векторните функции $f_s$, $f_v$ и $f_a$, могат да образуват в преходен режим на движение на точката М двумерното линейно пространство F(2). То ще се подчинява на аксиомите на обикновеното евклидово двумерно векторно пространство.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т22 (пространство Е(2)).** Енергията Е консумирана от точката М в преходен режим на движението й представлява вектор в двумерното линейно енергийно пространство Е(2).

Доказателство: Според аксиома Е9 и теоремите Т17 и Т20 скаларното произведение между скоростта на точката М v(t) и резултантната сила $f_r(t)$:

$$(63)\qquad \langle v(t),f_r(t)\rangle = \int_o^t (\Omega-1/\Omega)V(i\Omega)V(-i\,\Omega)dt =$$

$$= \int_o^t (\Omega-1/\Omega)|V(i\Omega)|^2 \exp(i\,\pi\,/2)dt$$

има качеството на енергия. Това е енергията пропорционална на силата $f_r(t)$. Да я означим с $E_r(t)$. От своя страна, скаларното произведение:

$$(64)\qquad \langle v(t),f_r(t)\rangle = \int_o^t V(i\Omega)V(-i\,\Omega)dt =$$

$$= \int_o^t |V(i\Omega)|^2 dt$$

също има качеството на енергия, която е пропорционална на силата $f_v(t)$. Да я означим с $E_v(t)$. Двете енергийни съставки притежават свойството:

(65) $E_r(t)| = (\Omega\text{-}1/\Omega)|E_v(t)|$ и

$$\arg(E_r(t))) = \arg(E_v(t))+\pi /2$$

При това последно условие квадратичната форма:

(66) $|E(t)|^2==|E_r(t)|^2+ |E_v(t)|^2$

ще притежава билинейна форма числено равна на нула. Имайки предвид и че според теоремата Т1 множеството енергийни стойности образуват адитивна група, стигаме до извода, че функциите $E_v(t)$ и $E_r(t)$ образуват в преходен режим на движение на точката М ортогонална база в двумерното линейно пространство Е(2). То се подчинява на аксиомите на обикновеното евклидово двумерно векторно пространство.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т23 (пространство S(2)).** Мощността S консумирана от точката М в преходен режим на движението й представлява вектор в двумерното линейно пространство на мощностите S(2).

Доказателство: След диференциране по времето t на равенството (63) ще получим комплексната функция:

(67) $Q(t) = (\Omega\text{-}1/\Omega)|V(i\Omega)|^2\exp(i\ \pi /2)$,

а след диференциране на равенството (64):

(68) $P(t) = |V(i\Omega)|^2$

Равенствата (67) и (68) са изоморфни спрямо равенствата (63) и (64), защото енергийните съставки $E_r(t)$ и $E_v(t)$ са функции на времето t и според теоремите Т5 и Т6 действието диференциране в случая ще е изоморфно спрямо действието интегриране. Същите равенства имат според аксиома Е10 качеството на мощност и, освен това, поради изоморфизма им с равенствата (63) и (64) образуват адитивна група. Пак поради изоморфизма квадратичната форма от мощности:

(69) $$|S(t)|^2 = |P(t)|^2 + |Q(t)|^2$$

ще притежава билинейна форма числено равна на нула, а функциите P(t) и Q(t) ще образуват в преходен режим на движение на точката М ортогонална база в двумерното линейно пространство S(2). Това пространство ще бъде изоморфно на пространството Е(2) и ще се подчинява на аксиомите на обикновеното евклидово двумерно векторно пространство.

С това теоремата е доказана.

## ЕНЕРГИЙНА АЛГЕБРА. ВТОРА ЧАСТ

Теорема Т24. Фазовият ъгъл $\varphi_k$ между k-тите хармоници $V_k$ и $F_k$ на скоростта v(t) и силата f(t) (вж. равенството (39)) в инвариантен режим е не по-малък от $-\pi/2$ радиана и не по-голям от $\pi/2$ радиана, т. е., в сила е равенството:

(70) $$-\pi/2 \le \varphi_k \le \pi/2$$

Доказателство: Ако допуснем противното, че равенството (70) не е спазено, ще излезне, че консумираната от точката М по равенството (39) активна енергия може да придобива и отрицателни стойности. А това противоречи на доказаното в теорема Т4 необходимо за състоянието инвариантност условие, а именно, че консумираната от обекта (в случая, точката М) активна енергия е винаги противопосочна на активната енергия на източника. Случаите, когато обектът връща предаваната му активна енергия обратно на източника (режимите на рекуперация, динамично спиране и противовключване) са характерни за преходен режим и ще се разгледат отделно.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т25.** Енергията пропорционална на пътя s(t) и ускорението a(t) на точката М (реактивната енергия) в инвариантен режим е числено равна на нула.

Доказателство: Пропорционалната на ускорението съпротивителна сила fa(t) се изчислява след диференциране по t на равенството (36), приемайки диференциращата константа $C_D$ ($Ns^2/m$) равна на единица:

$$fa(t) = C_D d/dt\left(\sum_{-\infty}^{\infty} v_k \exp(ik\Omega t)\right) = \tag{71}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} ik\Omega v_k \exp(ik\Omega t) =$$

От своя страна, пропорционалната на пътя съпротивителна сила $f_s(t)$ се изчислява след интегриране по t на равенството (36), приемайки диференциращата константа $C_I$ (N/m) равна на единица:

$$fs(t) = C_I \int_{o}^{t} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} v_k \exp(ik\Omega t)\right)dt = \tag{72}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} (1/ik\Omega)\, v_k \exp(ik\Omega t)$$

Общата - да я наречем реактивна - съпротивителна сила $f_r(t)$ на точката М ще бъде векторният сбор:

(73) $$f_r(t) = f_a(t) + f_s(t) =$$

$$= i\sum_{-\infty}^{\infty}(k\Omega - (1/k\Omega))\, v_k \exp(ik\Omega t) =$$

$$= 2i\sum_{1}^{\infty}(k\Omega-(1/k\Omega))\, v_k \exp(ik\Omega t)$$

Случаят k=0 се изключва от сумата, защото производната в дясната страна на равенството (71) ще бъде нула, а интегралът в дясната страна на равенството (72) ще бъде неопределен. От това следва, че нулевите хармоници не участват в реактивната съпротивителна сила $f_r(t)$ на точката М.

Реактивната енергия $E_Q$, консумирана от точката М ще представлява скаларното произведение:

(74) $$E_Q = \langle v(t), f_r(t)\rangle,$$

Предвид равенствата (72) и (73), както и факта, че при наличие на условието (36) интеграционният интервал (0, t) се преобразува в интервала (0, 2kπ) и функциите exp(ikΩt) образуват ортогонална база в пространството L2, скаларното произведение (74) ще придобие вида:

(75) $$E_Q = 2i\left(\sum_{1}^{\infty}\int_{o}^{2k\pi}(k\Omega-(1/k\Omega))|\, v_k\, |^2 dt\right)$$

Сумата от интеграли в дясната страна на равенството (75) е нула, защото всеки k-ти интеграл има решението:

$$(76) \qquad 2i\,(k\Omega-(1/k\Omega))|\,v_k\,|^2 \int_{o}^{2k\pi} dt =$$

$$= 2i\,(k\Omega-(1/k\Omega))|\,v_k\,|^2 it\Big|_{o}^{2k\pi} = 0 - 0 = 0$$

В комплексната равнина произведението $i2k\pi$ е нула.

С това теоремата е доказана.

**Определение О9.** Енергията $E_Q$ пропорционална на пътя s(t) и ускорението a(t) на точката M се нарича реактивна енергия. Тя е, както ще видим по-долу, еднозначна мяра за неефективност (реакция) на всеки синусоиден енергиен източник (вж. теоремата Т29).

**Теорема Т26.** Всеки хармоник на реактивната енергия $E_Q$ на точката M се колебае с честота $2k\Omega$, която е два пъти по-голяма от честотата на съответния хармоник $v_k$ на скоростта v(t) или $f_k$ на съпротивителната сила f(t).

Доказателство: Равенството (75) доказва, че реактивната енергия $E_Q$ консумирана от точката M в инвариантен режим представлява сума от хармоници. Ако в равенството (76) извършим интегрирането в текущия интервал (0, $2k\Omega t$), това ще означава, че търсим стойността на k-тия хармоник $E_{Qk}$ на същата реактивна енергия, в която и да е точка от интервала (0, $2k\pi$). Тази стойност ще се определя от поведението на функцията:

(76-1) $$E_{Qk}(t) = 2i(k\Omega-(1/k\Omega))|\, v_k\, |^2\, k\Omega t$$

Функцията (76-1) представлява вектор в комплексната равнина, който има променливия във времето модул $2(k\Omega-(1/k\Omega))|v_k|^2 2k\Omega t$ и променливия във времето аргумент i. Поведението на функцията $E_{Qk}(t)$ може да се проследи с помощта на следната таблица:

| $k\Omega t$ | i | $ik\Omega t$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| $\pi/2$ | i | i |
| $\pi$ | 0 | 0 |
| $3\pi/2$ | -i | -i |
| $2\pi$ | 0 | 0 |

С други думи, ако векторът:

(77) $$2(k\Omega-(1/k\Omega))|\, v_k\, |^2 \exp(i2k\Omega t)$$

описва окръжност с радиус $2(k\Omega-(1/k\Omega))|v_k|^2$ в комплексната равнина, то векторът:

(78) $$i2(k\Omega-(1/k\Omega))|\, v_k\, |^2 2k\Omega t$$

ще бъде проекцията му върху имагинерната ос. Тя се изменя по големина в интервала $(-i2(k\Omega-(1/k\Omega))|v_k|^2,\ i2(k\Omega-(1/k\Omega))|v_k|^2))$ със скорост (честота) $2k\Omega$. Тази честота е два пъти по-голяма от честотата $k\Omega$, с която в комплексната равнина се въртият векторите $v_k$ или $f_k$ (вж. равенството (36)) на k-тия хармоник на скоростта $v(t)$ или съпротивителната сила $f(t)$ на точката M.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т27.** Консумираната от точката М в инвариантен режим реактивната енергия $E_{Qk}(t)$ е минимална при $k\Omega t = -\pi/2$ и максимална при $k\Omega t = \pi/2$.

Доказателство: За k-тия пореден хармоник на реактивната енергия $E_{Qk}(t)$ тази истина е очевидна от таблицата в теоремата Т26. Според нея векторът (78) ще бъде минимален при $k\Omega t = -\pi/2$ и максимален при $k\Omega t = \pi/2$. Този вектор представлява подинтегралната функция в равенството (75), по което се изчислява консумираната от точката М в инвариантен режим реактивната енергия $E_{Qk}(t)$. Щом интегралите в дясната страна на това равенство имат максимална стойност, то и тяхната им сума ще е максимална.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т28.** Изчисляваната по равенството (75) реактивна енергия е фиктивна (не се съхранява в системата).

Доказателство: Според теоремата Т25 равенството (75) е идентично равно на нула, а според теоремата Т26 реактивната енергия $E_Q$ представлява сума от хармоници. Следователно тези енергийни хармоници се колебаят между точката М и енергийния източник без да вършат полезна работа, т. е., те не предизвикват изменения в скоростта на точката, а принуждават източника да променя големината на генерираната от него мощност, за да консумира точката необходимата за скростта й v(t) енергия. Това значи, че реактивната енергия $E_Q$ не влиза в енергийния баланс на крайния продукт (в случая, скростта v(t) на точката М) и, следователно, не се съхранява в системата.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т29.** Реактивната енергия, която се консумира в инвариантен режим от точката М и се изчислява по равенството:

$$E_Q = \Big(\sum^{\infty}\int_{-\infty o}^{2k\pi} v_k\, f_{-k}dt\Big) = \Big(\sum^{\infty}\int_{-\infty o}^{2k\pi} v_k\, f_{+k}dt\Big) = \Big(\sum_{1}^{\infty} V_k F_k \sin\varphi_k\Big)t, \tag{79}$$

където с $f_{+k}$ и $f_{-k}$ полагаме съответно:

(80) $f_{-k} = |f_k| \exp(ik\Omega t-\pi/2)$,

когато k-тия хармоник $f_k$ на съпротивителната сила f(t) изпреварва по фаза k-тия хармоник $v_k$ на скоростта v(t) и

(81) $f_{+k} = |f_k| \exp(ik\Omega t+\pi/2)$.

когато k-тия хармоник $f_k$ на съпротивителната сила f(t) изостава по фаза от k-тия хармоник $v_k$ на скоростта v(t), е мяра за неефективност на системата.

Доказателство: Според теоремата Т19 цялата консумирана от точката М енергия Е при движението й в инвариантен режим се отъждествява с активната енергия $E_P$ изчислявана по равенството (39). Тя, както бе споменато по-горе в определението О8, е мяра за ефективността на системата.

От друга страна колебанията на реактивната енергия, както се посочи в теоремата Т28, намаляват ефективността на системата, защото принуждават източника да повишава мощността си, за да задоволява консуматора до енергийната му необходимост и, от друга страна, намаляват пропускателната способност на енергийната линия "източник - консуматор". Затова е необходима някаква мяра за тази неефективност, която измервателните уреди за активна енергия не могат да показват. В противен случай, не е възможно да се определят средствата за отстраняването й.

Щом като равенството (39) е мяра за ефективност на системата, то равенството:

(82) $E_Q = (\Sigma V_k F_k \sin\varphi_k)t$

ще бъде мяра за неефективността й. Това е така, защото според равенството (70) в теоремата Т24 ъгълът $\varphi_k$ принадлежи на интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ и, следователно, там където $\cos \varphi_k$ расте, $\sin\varphi_k$

намалява, т. е., там където $\cos\varphi_k$ е единица, $\sin\varphi_k$ е нула. И при условие, че ефективните стойности $V_k$ и $F_k$ на хармониците на скоростта $v(t)$ и съпротивителната сила $f(t)$ са постоянни, равенството (80) е алтернативно на равенството (39). То не може да бъде друго, освен елемент от общата мяра за неефективност на системата.

Нека сега формално решим интегралната част от равенството (79), приемайки, че $v_k$ изпреварва по фаза $f_k$. За еднозначност на разсъжденията ще приемем, че фазовият ъгъл $\varphi_k$ се измерва в посока от $v_k$ към $f_k$. Тогава той ще е положителен, когато $v_k$ изпреварва по фаза $f_k$ и отрицателен, когато това е обратно. Ще получим:

$$(83)\qquad E_Q = \Big(\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2k\pi} v_k\, f_{-k}dt\Big) = \Big(\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2k\pi} |v_k|\,|f_k|\exp(i(\delta_k - \theta_k + \pi/2)dt,$$

където с $\delta_k$ и $\theta_k$ сме отбелязали приетите чрез равенството (43) начални фази на $v_k$ и $f_k$. Имайки предвид още и приетото в равенството (44) означение за фазовия ъгъл $\varphi_k$ като разликата:

$$(84)\qquad \delta_k - \theta_k = \varphi_k,$$

равенството (83) ще придобие вида:

$$(85)\qquad E_Q = \Big(\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2k\pi} |v_k|\,|f_k|\exp(i(-\varphi_k + \pi/2)dt \ =$$

$$= \left(\sum_{1}^{\infty} \int_{o}^{2k\pi} |v_k||f_k|(\exp(i(-\varphi_k + \pi/2) + \exp(-i(-\varphi_k + \pi/2))dt\right. =$$

$$=2\left(\sum_{1}^{\infty} \int_{o}^{2k\pi} |v_k||f_k|\cos(-\varphi_k + \pi/2)dt\right. =$$

$$=2\left(\sum_{1}^{\infty} \int_{o}^{2k\pi} |v_k||f_k|\sin\varphi_k\, dt.\right.$$

Нулевите хармоници в тригонометричната част от равенствата (85) са пренебрегнати по доказаната в теоремата Т25 необходимост.

Като имаме още предвид и равенството (49) за ефективните стойности $V_k$ и $F_k$ на хармониците на функциите v(t) и f(t) изразени тригонометрично чрез равенството (48) и заместим тези ефективни стойности в крайния резултат от равенството (85), ще получим точно крайния резултат от равенството (79)

С това теоремата е доказана.

Теорема Т30. Произведенията от квадратични форми от вида:

(86) $$\left(\sum_{1}^{\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{1}^{\infty} b_k^2\right)$$

се подчиняват на равенството:

$$(87)\qquad \left(\sum_{1}^{\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{1}^{\infty} b_k^2\right) = \left(\sum_{1}^{\infty} a_k b_k\right)^2 + \left(\sum_{1}^{\infty} a_p b_q - a_p b_q\right)^2 \quad p \neq q$$

Доказателство: Нека извършим умножението:

$$(88)\qquad (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$$

Ако прибавим и извадим в равенството (88) израза $2a_12b_{12}a_{22}b_{22}$ и извършим прегрупиране на членовете, равенството ще придобие вида:

$$(88.1)\qquad (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) =$$

$$= (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

И продължавайки по метода на пълната математична индукция, при сравняване на членовете с еднакви индекси, можем да съставим произведението:

$$(89)\qquad (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_i^2 + \ldots)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_i^2 + \ldots) =$$

$$= \left(\sum_{1}^{\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{1}^{\infty} b_k^2\right) = \left(\sum_{1}^{\infty} a_k b_k\right)^2 + \left(\sum_{1}^{\infty} a_p b_q - a_p b_q\right)^2 \quad p \neq q$$

С това теоремата е доказана.

Теорема Т31. Консумираната от точката М активна енергия $E_P$ може да се представи от израза:

$$(90)\qquad E_P = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{o}^{t=2k\pi} |v_k||f_{vk}|dt =$$

$$= \int_{0}^{t=2k\pi} \left( \left( \sum_{-\infty}^{\infty} |v_k|^2 \right) \left( \sum_{-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \cos^2\varphi_k \right) - \right.$$

$$\left. - \left( \sum_{-\infty}^{\infty} |v_p||f_q|\cos\varphi_q - |v_q||f_p|\cos\varphi_p \right)^2 \right)^{1/2} dt,$$

където съобразно с равенството (46) от теоремата за активната енергия Т19 сме положили:

(91) $\quad |f_k|\cos\varphi_k = |f_{vk}|,$

дефинирайки по този начин модула на k-тия хармоник $f_{vk}(t)$ на пропорционалната на скростта v(t) активна съпротивителна сила $f_v(t)$.

Доказателство: Ако в крайния резултат от равенството (89) преместим крайния десен член с обратен знак отляво, заменим долната граница на сумирането с -∞ и вместо $a_k$ напишем $|v_k|$, а вместо $b_k$ - $|f_{vk}|$, ще получим точно подинтегралните функции на равенството (90).

С това теоремата е доказана.

Теорема Т32. Консумираната от точката М реактивна енергия $E_Q$ може да се представи от израза:

(92) $$E_q = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{t=2k\pi} |v_k||f_{rk}| dt =$$

$$= \int_{0}^{t=2k\pi} \left( \left( \sum_{-\infty}^{\infty} |v_k|^2 \right) \left( \sum_{-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \sin^2\varphi_k \right) - \right.$$

$$- \left( \sum_{\substack{-\infty \\ p \neq q}}^{\infty} |v_p||f_q|\sin\varphi_q - |v_q||f_p|\sin\varphi_p)^2 \right)^{1/2} dt,$$

където съобразно крайния резултат в равенството (85) към теоремата за реактивната енергия Т29 сме положили:

(93) $|f_k|\sin\varphi_k = |\ f_{rk}|,$

дефинирайки по този начин модула на k-тия хармоник $f_{rk}(t)$ на реактивната съпротивителна сила $f_r(t)$ .

Забележка: Нулевият хармоник в равенството (92) е изключен.

Доказателство: Ако в крайния резултат от равенството (89) преместим крайния десен член с обратен знак отляво, заменим долната граница на сумирането с $-\infty$ и вместо $a_k$ напишем $|v_k|$, а вместо $b_k$ - $|f_{rk}|$, ще получим точно подинтегралните функции на равенството (92).

С това теоремата е доказана.

**Аксиома Е12.** Средата, в която се движи точката М е хомогенна и изотропна (с постоянни параметри).

**Аксиома Е13.** Средата, в която се движи точката М създава триене

**Определение О10.** Величината μ измервана в Ns/m, която трансформира линейно скоростта $v(t)$ на точката М в активната съпротивителна сила $f_v(t)$ по равенството:

(94) $f_v(t) = \mu v(t),$

ще наричаме активно съпротивление или линеен динамичен вискозитет, подобно на динамичния вискозитет при течности и газове, който се измерва в $Ns/m^2$. Той е реално число и характеризира средата, в която се движи точката М и, освен това, определя активните енергийни загуби на източника в системата. При хомогенна и изотропна (с постоянни параметри) среда μ е константа.

Можем да приемем, че в текста предварително сме се съгласили:

(95) $\mu = 1\ Ns/m$

**Теорема Т33.** Десният член от крайния резултат в равенството (90) е числено равен на нула.

Доказателство: Нека приемем, че условието (95) не е спазено и, следователно, $\mu \neq 1$. Тогава условието (94) е в сила в най-общия си вид. Можем в десният член от крайния резултат в равенството (90) да положим:

(96) $|f_{vq}| = \mu|v_q|$ and $|f_{vp}| = \mu\,|v_p|$

Замествайки (96) в десният член от крайния резултат в равенството (90), ще се убедим, че този член е нула.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т34.** Максимално консумираната в инвариантен режим на движение от точката М активна енергия $E_S$ се определя от равенството:

(97) $$E_S = \int_{0}^{t=2k\pi} \left(\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|v_k|^2\right)\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|f_k|^2\right)\right)^{1/2} dt$$

Доказателство: Щом според теоремата Т35 десният член от крайния резултат в равенството (90) в теоремата за активната енергия Т31 е нула, това равенство ще добие вида:

$$(98)\qquad E_P = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{o}^{t=2k\pi} \|v_k\|\|f_k|\cos\varphi_k dt =$$

$$= \int_{o}^{t=2k\pi} \left(\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|v_k|^2\right)\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|f_k|^2|\cos\varphi_k{}^2\right)\right)^{1/2} dt$$

Функцията $E_P$ ще придобие максимум, когато експоненциалната й част е единица, т. е., при $\varphi_k = 0$. Това се потвърждава и от равенството (39) в теоремата T19. Щом това е така, можем да положим в равенството (98) $\varphi_k = 0$. Крайният резултат в равенството (98) ще стане еднакъв с дясната страна на равенството (97).

С това теоремата е доказана.

**Теорема T35.** Равенството (97) определя и минимално консумираната в инвариантен режим на движение от точката M реактивна енергия.

Доказателство: Непосредствената оценка на равенството (82) говори, че при $\varphi_k = 0$ консумираната в инвариантен режим на движение от точката M реактивна енергия $E_Q$ ще бъде нула. Това е нейният реален физически минимум. Алгебричният минимум - максималната отрицателна стойност на $E_Q$ - не се разглежда в тази теорема.

С това теоремата е доказана.

**Теорема T36 (пространство E(3)).** Енергията E консумирана от точката M (енергийният баланс на системата “източник - точка”) в инвариантен режим на движението й представлява вектор в тримерното линейно енергийно пространство E(3).

Доказателство: Нека диференцираме по времето t равенството (90), имайки предвид истината, че според теоремата T33 последният член от крайния резултат в това равенство е нула, както и истината (91). Ще получим:

(99) $$P = dE_P/dt = (S_P{}^2)^{1/2},$$

където сме положили:

(100) $$S_P{}^2 = (\sum_{-\infty}^{\infty}|v_k|^2)\,(\sum_{-\infty}^{\infty}|f_{vk}|^2) = (\sum_{-\infty}^{\infty}|v_k|^2)\,(\sum_{-\infty}^{\infty}|f_k|^2\cos^2\varphi_k)$$

Ако извършим диференциране по времето t на равенството (92), имайки предвид истината (93), ще получим:

(101) $$Q = dE_Q/dt = (S_Q{}^2 - R_Q{}^2)^{1/2},$$

където сме положили:

(102) $$S_Q{}^2 = (\sum_{-\infty}^{\infty}|v_k|^2)\,(\sum_{-\infty}^{\infty}|f_{rk}|^2) = (\sum_{-\infty}^{\infty}|v_k|^2)\,(\sum_{-\infty}^{\infty}|f_k|^2\sin^2\varphi_k) \quad \text{и}$$

(103) $$R_Q{}^2 = (\sum_{-\infty \quad p \neq q}^{\infty}|v_p||f_{rq}| - |v_q||f_{rp}|)^2 =$$

$$= (\sum_{-\infty \quad p \neq q}^{\infty}|v_p||f_q|\sin\varphi_q - |v_q||f_p|\sin\varphi_p)^2.$$

Ако сега съставим сбора:

(104) $$P^2 + Q^2 = S_P{}^2 + S_Q{}^2 - R_Q{}^2 = S^2 - R^2,$$

ще последва, че:

(105) $$S^2 = S_P{}^2 + S_Q{}^2 - R_Q{}^2 = (\sum_{-\infty}^{\infty}|v_k|^2)\,(\sum_{-\infty}^{\infty}|f_k|^2) \text{ и}$$

$$(106) \qquad R^2 = R_Q^{\;2} = (\sum_{-\infty,\ p \neq q}^{\infty} |v_p||f_q|\sin\varphi_q - |v_q||f_p|\sin\varphi_p)^2.$$

Или в крайна сметка ще е налице истината, че:

$$(107) \qquad P^2 + Q^2 + R^2 = S^2 \text{ или, че:}$$

$$(108) \qquad S = (P^2 + Q^2 + R^2)^{1/2}.$$

Ако равенствата (90) и (92), които имат физическото качество на енергия и се трансформират чрез диференциране по времето t до равенствата (99) и (101), т. е.:

$$(109) \qquad E_P(90) \xrightarrow{d/dt} P(99), \quad E_Q \xrightarrow{d/dt} Q(101),$$

то равенствата:

$$(110) \qquad \int_o^t Pdt = E_P \qquad \int_o^t Qdt = E_Q,$$

които според диаграмата (109) представляват изоморфната им обратна трансформация, очевидно ще имат също качеството на енергия. В такъв случай и сборът:

$$(111) \qquad \int_o^t Sdt = \int_o^t (P^2 + Q^2 + R^2)^{1/2}dt$$

ще има качеството на енергия, защото ще има резултат идентичен с равенството (97), което също има качеството на енергия. И ако по тази причина обединим равенствата (97) и (111), ще излезне, че цялата енергия $E_S$, която източникът предава на точката M се определя от равенството (111). Тя има освен двете си определени от равенството (110) активна - $E_P$ и реактивна $E_Q$ съставки и остатъчната (деформационната) съставка - $E_R$. Тя се определя от равенството:

$$(112) \qquad \int_o^t R dt = E_R.$$

Като имаме предвид, че P, Q и R в инвариантен режим на движение на точката M не зависят от времето t, интегралните равенства (110) и (112) ще имат решенията:

$$(113) \qquad Pt = E_P,\ Qt = E_Q,\ Rt = E_R$$

Щом това е така, следва, че интегралното равенство (111) ще има решението:

$$(114) \qquad St = E_S$$

Лявата страна на равенството (114) може да се замести в равенството (111). Тогава ще стане тривиално очевидно, че:

$$(115) \qquad E_S^2 = S^2t^2 = P^2t^2 + Q^2t^2 + R^2t^2$$

Тричленната квадратична форма (115) има билинейна форма равна на нула. Освен това, според теоремата T1 трите й члена образуват адитивна група. А от последните два факта следва, че $E_S$ е тримерен вектор на компонентите си $E_P$, $E_Q$, и $E_R$ и, следователно, принадлежи на линейно тримерно пространство, в което $E_P$, $E_Q$, и $E_R$ образуват ортогонална база. Можем да го означим с E(3).

Пространството E(3) ще се подчинява на аксиомите на обикновено тримерно евклидово пространство.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т37.** Изчисляваната по равенството (112) остатъчна енергия $E_R$ е фиктивна (не се съхранява в системата).

Доказателство: Според равенството (92) остатъчната енергия $E_R$ представлява десният му краен член. Нейното нарастване или намаляване зависи от фазовият ъгъл $\varphi_k$ или по-точно от функцията $\sin\varphi_k$. Когато всичките фазови разлики $\varphi_k$ между хармониците $v_k(t)$ на скоростта $v(t)$ на точката M и хармониците $f_k(t)$ на съпротивителната й сила $f(t)$ са нула, следва че и $E_R$ ще бъде нула. Обратно, когато ъгълът $\varphi_k$ стане $\pi/2$ радиана, $E_R$ ще има максимална стойност. Знакът на $E_R$ (положителен или отрицателен) зависи също от $\varphi_k$.

Същото поведение спрямо $\varphi_k$ има и реактивната енергия $E_Q$. Следователно, фазовите свойства на $E_R$ съвпадат с фазовите свойства на $E_Q$. Всеки k-ти хармоник на $E_Q$ се колебае със същата честота - $2k\Omega$, с която се колебае и k-тият хармоник на $E_R$. И щом за всеки кратен на $2\pi$ период хармониците на $E_R$ са нула, то енергията $E_R$ е фиктивна.

С това теоремата е доказана.

**Определение О11.** Величината:

(116) $\sigma_m = mk\Omega,$

която е модул на имагинерното число $imk\Omega$, трансформиращо линейно k-тия хармоник $v_k(t)$ на скоростта $v(t)$ на точката M в k-тия хармоник $f_{ak}(t)$ на пропорционалната на ускорението съпротивителна сила $f_a(t)$ по равенството:

(117) $f_{ak}(t) = imk\Omega v_k(t) = i\sigma_m v_k(t),$

има качеството на съпротивление. Нека го наречем реактивно инерционно съпротивление. Тук m е масата на точката M, която се измерва в kg или $Nm/s^2$. Според аксиомата E6, следва, че можем да приемем m за константа.

Можем да приемем, че в текста предварително сме се съгласили че масата на точката M е:

(118) $$m = 1\ Ns/m^2 = 1\ kg$$

Подобно на активното съпротивление $\mu$, реактивното инерционно (масово) съпротивление $\sigma_m$ се измерва в Ns/m.

**Аксиома E14.** Средата, в която се движи точката M притежава еластичност.

**Определение O12.** Величината:

(119) $$\sigma_l = 1/C_l k\Omega,$$

която е модул на имагинерното число $1/ik\Omega C_l$, трансформиращо линейно k-тия хармоник $v_k(t)$ на скоростта $v(t)$ на точката M в k-тия хармоник $f_{sk}(t)$ на пропорционалната на пътя съпротивителна сила $f_s(t)$ по равенството:

(120) $$f_{sk}(t) = v_k(t)/ik\Omega C_l = -i\sigma_l v_k(t)$$

има качеството на съпротивление. Нека го наречем реактивно еластично съпротивление. Тук:

(121) $$\varepsilon_l = 1/C_l$$

е линеен модул на Юнг за еластичността на средата, в която се движи точката М. Той се измерва в N/m, а реципрочната му стойност - коефициента на еластичност на средата $C_l$ - в m/N.

Ако по-долу представим стандартният модул на Юнг G, определящ еластичната свиваемост на средата $\Delta l/l$ по закона на Хук:

(122) $\Delta l/l = Fl/GS$,

където с $\Delta l$ бележим праволинейно еластично свиване на средата, ако точката М изминеше правия участък l, с l - дължината на този прав участък измервана в метри (m), с F - вътрешната (собствената) еластична сила на средата измервана в нютони (N), а с S - напречното сечение на точката М - ако за миг приемем, че точката М се е превърнала в движещо се нормално на l плоско тяло - измервано в $m^2$, то нововъведеният линеен модул на Юнг $\varepsilon_l$ ще представлява производната на стандартния модул на Юнг спрямо елементарен участък от траекторията g на точката М:

(123) $\varepsilon_l = dG/dl$

При хомогенна и изотропна (с постоянни параметри) среда $\varepsilon_l$ е константа. Можем да приемем, че в текста предварително сме се съгласили:

(124) $\varepsilon_l = 1$ N/m и

(125) $C_l = 1$ m/N.

Подобно на активното съпротивление $\mu$, реактивното еластично съпротивление $\varepsilon_l$ се измерва в Ns/m.

**Теорема T38.** Изчисляваната по равенството (97) енергия $E_S$ е максималновъзможната енергия консумирана от точката М в инвариантен режим на движението й.

Доказателство: Щом според теоремата Т37 $E_S$ е вектор в пространството Е(3), равенството (97) е необходимо да определя неговия модул.

От друга страна:

- теоремата Т34 доказва, че равенството (97) определя максимума на енергийната ефективност $E_P$;
- теоремата Т35 доказва, че равенството (97) определя минимума на енергийната неефективност $E_Q$;
- теоремата Т37 доказва, че фазовото поведение на $E_R$ съвпада с фазовото поведение на $E_Q$. По този начин равенството (97) определя минимума и на енергийната неефективност $E_R$.

Нека съставим редиците:

(126) $\varphi$: $-\pi/2<\varphi_{k1} < \varphi_{k2} <\ldots< \varphi_{kn} = 0 < \varphi_{kn+1} <\ldots< \pi/2$

(127) $E_P$: $0 < E_{P1} < E_{P2} <\ldots< E_{Pn} = \max > E_{Pn+1} >\ldots > 0$

(128) $E_Q$: $\max > E_{Q1} > E_{Q2} >\ldots> E_{Qn} = 0 < E_{Qn+1} <\ldots < \max$

(129) $E_R$: $\max > E_{R1} > E_{R2} >\ldots> E_{Rn} = 0 < E_{Rn+1} <\ldots < \max$

Тук енергиите са представени с абсолютните си стойности. Вглеждайки се по-внимателно в средата на четирите редици или по-точно казано, оценявайки едновременно стойностите на $E_{Pn}$, $E_{Qn}$ и $E_{Rn}$ при $\varphi_{kn} = 0$, за редиците (127), (128) и (129) се стига до извода, че:

(130) $\sup(E_P) = \inf(E_Q) = \inf(E_R) = E_S$

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т39 (пространство S(3)).** Мощността S консумирана от точката M (мощностният баланс на системата “източник - точка”) в инвариантен режим на движението й представлява вектор в тримерното линейно пространство на мощностите S(3).

Доказателство: След коренуване, диференциране по времето t и отново повдигане на квадрат на (115) ще получим квадратичната форма:

(131) $$S^2 = (dE_S/dt)^2 = P^2 + Q^2 + R^2$$

Равенството (131) е изоморфно спрямо равенството (115), защото енергийните съставки $E_P$, $E_Q$ и $E_R$ са функции на времето t и според теоремите Т5 и Т6 действието диференциране в случая ще е изоморфно спрямо действието интегриране. Същите диференцирани съставки имат според аксиома Е10 качеството на мощност и, освен това, поради изоморфизма им със съставките в равенството (115) образуват адитивна група. Пак поради изоморфизма квадратичната форма от мощности (131) ще притежава билинейна форма числено равна на нула, а функциите P, Q и R ще образуват в инвариантен режим на движение на точката M ортогонална база в тримерното линейно пространство S(3), в което мощността S е вектор. Това пространство ще бъде изоморфно на пространството E(3) и ще се подчинява на аксиомите на обикновеното евклидово тримерно векторно пространство.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т40.** Изчисляваната по равенството (97) мощност S е максималновъзможната мощност консумирана от точката M в инвариантен режим на движението й.

Доказателство: Щом тримерното линейно пространство S(3), в което мощността S е вектор, според теоремата Т39 е изоморфно на енергийното пространство E(3), в което енергията $E_S$ според теоремата Т36 е вектор, доказаното в теоремата Т38 за $E_S$ е в сила и за S.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т41 (пространство E(2)).** Частният случай, при който е възможно в равенствата (90) и (92) да положим:

(132) $p = q$,

(133) $k = 1$,

т. е., когато точката M се намира в синусоидален инвариантен режим на движение, консумираната енергия E от точката M (енергийният баланс на системата "източник - точка") представлява вектор в двумерното линейно енергийно пространство E(2).

Доказателство: Спазването на условието (132) изисква консумираната от точката M остатъчна (деформационна) енергия $E_R$ от равенството (106) да бъде нула. Тогава равенството (111) ще се запише във вида:

$$E_S = \int_o^t S\,dt = \int_o^t (P^2 + Q^2)^{1/2} dt \tag{134}$$

а равенството (115) - във вида:

$$E_S^2 = S^2t^2 = P^2t^2 + Q^2t^2. \tag{135}$$

Равенствата (134) и (135) не премахват критериите за съществуване на енергийно пространство, които теоремата Т36 изисква, защото членовете им имат качеството на енергия, подчинено вече на тези изисквания. Тези членове са два на брой, което значи, че енергийното пространство E(3) от теоремата Т36 се преобразува от тримерно в двумерно. Можем да го означим с E(2).

От своя страна, спазването и на условието (133) изисква преобразуването на равенството за активната енергия (39) в равенството:

(136) $E_P = VF\cos\varphi t$,

а крайният резултат от равенството за реактивната енергия (79) - в равенството:

(137) $E_Q = VF\sin\varphi t$,

където V и F са съответно ефективните стойности на скоростта v(t) на точката M и съпротивителната й сила f(t) изчислени по равенствата:

(138) $$V = \left(\frac{d}{dt}\left(\int_o^t (2|v|\cos(\Omega t+\delta))^2 dt\right)\right)^{1/2}$$ и

$$F = \left(\frac{d}{dt}\left(\int_o^t (2|f|\cos(\Omega t+\theta))^2 dt\right)\right)^{1/2}$$

Имайки предвид, че експоненциалните модули |v| и |f|, съответно, на хармониците на скоростта v(t) на точката M и на съпротивителната й сила f(t) според равенствата (49) са два пъти по-малки от тригонометричните (реално измеримите) им модули (амплитуди), т. е.:

(139) $2|v| = v_{max} = V\sqrt{2}$ и $2|f| = f_{max} = F\sqrt{2}$,

следва да приемем съобразно равенствата (138), че единственият хармоник на скоростта определя еднозначно поведението й във времето t по равенството:

(140) $v(t) = v_{max}\cos(\Omega t+\delta)$,

а единственият хармоник на съпротивителната сила определя еднозначно

поведението й във времето t по равенството:

(141) $f(t) = f_{max}\cos(\Omega t+ \theta)$.

Тук, както в равенствата (48), $\delta$ и $\theta$ са началните фази на скоростта v(t) и съпротивителната сила f(t), а разликата им:

(142) $\delta - \theta = \varphi$.

Равенствата (140) и (141) са добре познати истини от електротехниката. На практика, обаче, е прието координатните системи за изобразяване на тези равенства да имат начало с г/2 радиана назад или напред, така че при нулеви начални фази в началото на координатната система колебанията да имат стойност нула. При това условие равенствата имат най-разпространения си вид:

(143) $v(t) = v_{max}\sin(\Omega t+\delta)$ и $f(t) = f_{max}\sin(\Omega t+\theta)$,

от който произлиза и терминът “синусоидален инвариантен режим”.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т42 (пространство Е(1)).** Частният случай, при който е възможно в равенствата (90) и (92) да положим:

(144) $p = q$,

(145) $k = 0$,

т. е., когато точката М се намира в постоянен инвариантен режим на движение, консумираната енергия Е от точката М (енергийният баланс на системата “източник - точка”) представлява вектор в едномерното линейно енергийно пространство Е(1).

Доказателство: Спазването на условието (144) изисква консумираната от точката М остатъчна (деформационна) енергия $E_R$ от равенството (106) да бъде нула, а спазването на условието (145) - да бъдат нула реактивните съпротивления $\sigma_m$ и $\sigma_l$ (вж. равенствата (116) и (119) и условието за нулевия хармоник в теоремата Т25), т. е. масата m на точката М е инерционно пренебрежима, а средата на движението й е нееластична. От това следва, че точката М не консумира и реактивна енергия $E_Q$ (вж. равенството (92) в теоремата Т25), а - като последствие - съдейки по равенството (111), излиза, че тримерното линейно енергийно пространство Е(3) се преобразува в едномерното енергийно пространство Е(1), защото последните два члена в това равенство стават нула.

Освен всичко това, спазването на условието (145) означава физически, че скоростта v(t) на точката М според равенството (36) е непериодична величина, защото не зависи от честотата Ω. Това добре проличава, ако в равенствата (36) формално положим спазеното условие (145). Ще излезне че:

(146) $$v(t) = 2v_o = V = const.$$

$$f(t) = 2f_o = F = const.$$

т. е., точката М се движи с постоянна скорост, което поражда постоянна съпротивителна сила. Щом това е така, понятието фаза се обезсмисля физически. Нещо повече, условието (145) формално анулира имагинерната част в равенствата (36), което довежда до верижните последствия, началните фази в равенствата (43) да са нула, а от тях и фазовите разлики между хармониците на скоростта $v_k(t)$ и съпротивителната сила $f_k(t)$ изразени в равенството (45) също да са нула. Това ни дава правото да приемем и началните фази в равенството (138), и фазовата разлика в равенството (136) за нула. В такъв случай, консумираната от точката М енергия ще се определя от равенството:

(147) $E = VFt,$

където V и F са ефективните стойности на скоростта и съпротивителната сила на точката М изчислени в равенствата (138) при:

(148) $\Omega = 0, \ \delta = 0$ and $\theta = 0.$

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т43 (пространство E(1)).** Консумираната енергия E от точката М (енергийният баланс на системата “източник - точка”) представлява вектор в едномерното линейно енергийно пространство E(1) и при синусоидален инвариантен режим на движението й, при условие че:

(149) $\sigma_m = \sigma_l,$

(вж. равенствата (116) и (119)).

Доказателство: При спазване на условието (149), комплексното имагинерно число:

(150) $i\sigma = i\sigma_m + 1/i\sigma_l = i(\sigma_m - 1/\sigma_l) = 0$

Това според равенствата (117) и (120) значи, че единственият хармоник на реактивната съпротивителна сила на точката М (условията (132) и (133) остават), който ще се определя от равенството (вж. равенството (73)):

$$(151) \qquad f_r(t) = f_a(t) - f_s(t) = i\sigma v(t) = i(\sigma_m - 1/\sigma_l)v(t) = 0$$

Тогава според равенството (75) цялата консумирана от точката М реактивна енергия $E_Q$ става нула.

Настъпва явлението резонанс между инерционната (кинетичната) и еластичната (потенциалната) реактивни енергии на точката М. Точката консумира единствено активна енергия за преодоляване на триенето. Това е добре познатият реален хармоничен осцилатор намерил приложения в часовниковото махало на Хюйгенс, трептящият кръг на Маркони, поставил началото на радиопредаванията и т. н.

При резонанс фазовата разлика в равенството (142) става:

$$(152) \qquad \delta - \theta = \varphi = 0,$$

защото единствената действуваща - пропорционалната на скоростта съпротивителна сила $f_v(t)$ на точката М е във фаза със скоростта й $v(t)$ вж. равенствата (94) и (36). Това ни дава правото да заместим (152) в равенствата (135) и (136). В резултат от това, цялата консумирана от точката М енергия според равенството (134) ще се определя от равенството:

$$(153) \qquad E = E_S = St = Pt = VFt,$$

което е идентично с равенството (147) в теоремата Т42. По този начин двумерното енергийно пространство Е(3) се преобразува в едномерното енергийно пространство Е(1).

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т44 (пространства S(2) и S(1)).** При преобразуване на енергийното пространство Е(3) в пространствата Е(2) и Е(1) едновременно се преобразува пространството на мощностите S(3) в пространствата S(2) и S(1).

Доказателство: Пространствата E(2) и E(1) се определят еднозначно от базите си:

(154) $E(2):(E_P, E_Q), E(1):(E_P)$.

След диференциране на енергийните бази (154), ще получим според аксиомата Е10 изоморфните им бази от мощности:

(155) $S(2):(P, Q), S(1):(P)$.

С това теоремата е доказана.

**Определение O13.** При спазване на условието:

(156) $f(t) = 0$

настъпва безенергийно кинематично равновесие. Точката M няма маса или масата й е инерционно пренебрежима и се движи в идеално несъпротивителна среда. Върху нея действува скоростта на източника
$v_g(t)$, която се приема беззагубно и се преобразува във $v(t)$. Системата "източник - точка" е кинематично инвариантна, ако ефективната стойност V на скоростта на точката M е постоянна, т. е.:

(157) $v_g(t) = v(t) = V = const.$

Определение O14. При спазване на условието:

(158) $v(t) = 0$

настъпва безенергийно статично равновесие. Точката М е в покой. Върху нея действува външната сила на източника $f_g(t)$, която се уравновесява от вътрешните напрежения на материята съсредоточена в точката. Резултантната на тези структурни напрежения е силата f(t). Системата "източник - точка" е статично инвариантна, ако ефективната стойност F на съпротивителната сила на точката М е постоянна, т. е.:

(159) $$f_g(t) = f(t) = F = const.$$

**Определение О15.** При едновременно спазване на условията (156) и

(158) настъпва пълна енергийна или безенергийна изолация на точката М от източника. Системата "източник - точка" се е разпаднала. Точката М се намира в консервативна инвариантност, ако вътрешната й енергийна обмяна не води до никакви структурни промени (кристализация, поляризация, химична реакция, атомно разпадане и т. н.) на съсредоточената в нея материя.

**Определение О16.** При спазване на условията:

(160) $$\mu = const,\ \sigma_m = const \text{ и } \sigma_l = const,$$

т. е., при постоянна маса на точката М, която се движи в хомогенна и изотропна среда, системата "източник - точка" се нарича линейна. При неспазване на условието (160) системата е нелинейна.

**Теорема Т45.** Инвариантен режим съществува само тогава, когато системата е линейна.

Доказателство: Нека образуваме комплексното число:

(161) $$\Gamma = \mu + i(\sigma_m - \sigma_l).$$

Неговият модул:

(162) $$|\Gamma| = (\mu^2 + (\sigma_m - \sigma_l)^2)^{1/2}$$

ще бъде постоянен, когато е спазено условието (160). При това условие ще бъде постоянен и аргументът му:

(163) $$\delta = \mathrm{arc\,tg}((\sigma_m - \sigma_l)/\mu)$$

Пак при това условие ще бъде постоянна ефективната стойност на всеки k-ти хармоник $f_k(t)$ на съпротивителната сила f(t), защото според (94), (117) и (120), следва че:

(164) $$f_k(t) = fv_k(t) + i(fa_k(t) - fs_k(t)) = \Gamma v_k(t)$$

Величината Г има качеството на съпротивление, съдейки по равенствата (162) и (164). Тя се измерва в Ns/m. Нека подобно на електротехниката наречем в импеданс, а разликата $\sigma_m - \sigma_l$, която също има качеството на съпротивление - реактанс.

Ако според равенствата (36), (47) и (49) изчислим за инвариантен режим на точката М ефективната стойност F на съпротивителната й сила f(t), тя ще бъде:

(165) $$F = (d/dt\langle f(t),f(t)\rangle)^{1/2} = \left(\sum_{-\infty}^{\infty}|f_k|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{o}^{\infty}|F_k|^2\right)^{1/2}$$

С други думи постоянният импеданс може да доведе до постоянни ефективни стойности на хармониците, а от там - и на ефективната стойност на цялата съпротивителна сила f(t). Това, от своя страна, според равенството (105) прави възможно да бъде постоянна пълната енергия консумирана от точката М. Или, другояче казано, енергийният баланс на системата “източник - точка” може да стане постоянен, разбира се, ако (вж. равенството (164)) ефективната стойност V на скоростта v(t) на точката M, определена от равенството:

$$(166) \qquad V = (d/dt<v(t),v(t)>)^{1/2} = (\sum_{-\infty}^{\infty}|v_k|^2)^{1/2} = (\sum_{o}^{\infty}|V_k|^2)^{1/2}$$

е постоянна. Обратно, според теоремата Т3 постоянният енергиен приток $E_g(i)$ на източника води до постоянна енергийна консумация $E_c(i)$ на точката M, а от там и до постоянна ефективна стойност V на скоростта й v(t), когато системата “източник - точка” е инвариантна.

С това теоремата е доказана.

## ДВОЙНСТВЕНОСТ НА ЕНЕРГИЙНАТА АЛГЕБРА. УНИВЕРСАЛНОСТ НА ТЕОРИЯТА НА ИНВАРИАНТНИТЕ СИСТЕМИ

**Определение О17.** Линейното векторно пространство:

$$(167) \qquad L(i): (l_1, l_2,...,l_i)$$

е двойнствено (дуално) на пространството:

$$(168) \qquad M(j): (m_1, m_2,...,m_j),$$

където векторите l1, l2,...,li и m1, m2,...,mj образуват ортогонални бази в пространствата L(i) и M(i), ако всеки вектор L от пространството L(i)се преобразува линейно във вектора M от пространството M(j), т. е., съществува различната от нула константа β наречена коефициент на двойнственост, такава че:

(169) $L = \beta M$

Когато $\beta > 0$, пространствата са ковариантно двойнствени (дуални), а когато $\beta < 0$ - контравариантно двойнствени (дуални).

**Теорема Т46.** Пространството L(i) е двойнствено на пространството M(j), ако размерностите им:

(170) $\dim(L(i)) = i = j = \dim(M(j))$.

Доказателство: Спазването на условието (169) изисква линейност между модулите и аргументите на векторите L и M. С други думи, е необходимо модулите да се подчиняват на условието:

(171) $|L| = (l_1^2 + l_2^2 + ... + l_i^2)^{1/2} =$

$$= \beta\, (m_1^2 + m_2^2 + ... + m_i^2)^{1/2} = \beta\, |M|,$$

а определящите аргументите единични вектори да се подчиняват на условията:

(172) $e_i = l_i/|l_i| = \beta m_j/\beta|m_j| = e_j$ или

(173) $e_i e_j = 1$

Спазването на условията (171), (172) или (173) е възможно единствено при наличие на спазено условие (170).

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т47.** Системата "източник - точка М" е инвариантна само тогава, когато енергийните пространства $E_g(i)$ на източника и $E_c(j)$ на консумиращата енергия точка М са контравариантно двойнствени.

Доказателство: Според теоремата Т3 е необходимо всеки енергиен вектор Ес от пространството на консумираната енергия $E_c(j)$ да бъде равен на всеки енергиен вектор $E_g$ от пространството на генерираната енергия $E_g(i)$ , т. е., да е налице зависимостта:

(174) $E_c + E_g = 0$

А това е възможно, когато пространствата $E_c(i)$ и $E_g(i)$ са според равенството (178) контравариантно двойнствени, при което за спазване на равенството (174) е необходимо коефициентът на двойнственост:

(175) $\beta = -1$

така, че:

(176) $E_g = \beta E_c = -E_c$

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т48.** Системата "източник - точка М" е инвариантна само тогава, когато енергийните пространства $E_g(i)$ на източника и $E_c(j)$ на консумиращата енергия точка М са с еднаква размерност в преходния и инвариантния режим на движение на точката.

Доказателство: Според теоремата Т47 за наличие на инвариантност е необходима двойнственост между пространствата $E_g(i)$ и $E_c(j)$, а според теоремата Т46 двойнствеността между пространствата $E_g(i)$ и $E_c(j)$ съществува, когато (вж. равенството (179)):

(177) $\dim(E_g(i)) = i = j = \dim(E_c(j))$

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т49.** Системата "източник - точка М" е инвариантна само тогава, когато пространствата на мощностите $S_g(i)$ на източника и $S_c(j)$ на консумиращата мощност точка М са с еднаква размерност в преходния и инвариантния режим на движение на точката.

Доказателство: Според теоремата Т39 пространствата $S_g(i)$ и $S_c(i)$ са изоморфни съответно на пространствата $E_g(i)$ и $E_c(j)$. От това следва, че ако диференцираме по времето t енергийните пространства в равенството (177), размерностите им няма да се променят. Тогава ще бъде в сила равенството:

(178) $$\dim(S_g(i)) = i = j = \dim(S_c(i))$$

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т50.** Импедансът в равенството (170) представлява вектор в двумерното линейно пространство в(2).

Доказателство: Според равенството (171) квадратичната форма:

(179) $$|\Gamma|^2 = \mu^2 + (\sigma_m - \sigma_l)^2$$

има билинейна форма равна на нула.

Според равенствата (94), (117) и (120) величините $\mu$, $\sigma_m$ и $\sigma_l$ преобразуват линейно поредния хармоник $v_k(t)$ на скоростта $v(t)$ на точката М в хармониците $f_{vk}(t)$, $f_{ak}(t)$ и $f_{sk}(t)$, които имат качеството на сила. Но множеството от сили:

(180) $$\{f_{vk}(t), f_{ak}(t) - f_{sk}(t)\}$$

според аксиомата Е8 са събираеми на векторен сбор и, следователно, образуват адитивна група. Тогава и линейното на (180) множество:

(181) $\{\mu, \sigma_m - \sigma_l\}$

също ще образува адитивна група. Щом това е така, величините $\mu$, $\sigma_m$ и $\sigma_l$ ще образуват ортогонална база в двумерно линейно векторно пространство. Нека го наречем Γ(2).

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т51.** В преходен режим на движение на точката М двумерното линейно пространство на съпротивителните ѝ сили F(2) е ковариантно двоинствено на импедансното пространство Γ(2).

Доказателство: Според определенията О10, О11 и О12 импедансното множество (181) характеризира напълно обекта, консумиращ енергия, а според теоремата Т45 този обект може да има инвариантно поведение, когато това множество не зависи нито от времето t, нито от скоростта v(t) на точката М. В инвариантен режим, когато скоростта на точката М според равенството (36) има постоянна ефективна стойност, защото зависи от постоянната честота $\Omega_к$, това е така. Но в преходен режим, когато според равенството (33) скоростта на точката М зависи от променящата се в безкрайни граници честота Ω, променливата ефективна стойност на тази скорост води според равенствата (116), (119) и (170) до променливия във времето t импеданс:

(182) $\Gamma = \mu + i(\sigma_m - \sigma_l) = \mu + i(m\Omega - 1/C_l\Omega)$,

защото честотата Ω се променя едновременно с t. Независимо от това, квадратичната форма:

(183) $|\Gamma|^2 = \mu^2 + (\sigma_m - \sigma_l)^2$

ще има билинейна форма равна на нула. Съдейки по равенствата (59) и (60) това значи, че импедансното пространство Γ(2) чрез равенствата:

(184) $F(i\Omega) = \Gamma V(i\Omega) = \mu V(i\Omega) + i(m\Omega-1/C_l\Omega)V(i\Omega)$

се преобразува в силовото пространство F(2) .  Според теоремата Т46 и еднаквите алгебрични знаци на $\mu$, $\sigma_m$ и $\sigma_l$ в равенствата (182) и (184) тези пространства са ковариантно двойнствени.

С това теоремата е доказана.

**Определение О18.** Енергийна алгебра е множеството от операции:

(185) $\Omega: (\cdot\Gamma, \langle v,f \rangle)$,

където $\cdot\Gamma$ представлява умножение по импеданс (вж . равенството (170)), а $\langle v,f \rangle$ - скаларното произведение между скоростта v(t) на точката М и съпротивителната й сила f(t), което преобразува множеството от скорости и импеданси:

(186) $A: (v, \Gamma)$

в енергийното множество:

(187) $E_S: (E_P, E_Q)$ или $E_S: (E_P, E_Q, E_R)$

Или, другояче казано, енергийна алгебра $\Omega$ е композицията от операции:

(188) $\Omega = \cdot\Gamma \circ \langle v,f \rangle$

в диаграмата:

(189) $A: (v, \mu, \sigma_m, \sigma_l) \xrightarrow{\Omega} E_S$

**Теорема Т52.** Независимо от физическото качество на енергията (механична, топлинна, електрична, магнитна, електромагнитна, химична, ядрена и т. н.) всички енергийни равенства, описващи консумиране или генериране на енергия, които почиват на аксиоматика двойнствена на аксиоматиката Е1, Е2,...,Е14, са двойнствено ковариантни на възможните енергийни равенства, описващи консумирането или генерирането на енергия в системата "енергиен източник - материална точка".

Доказателство: Според аксиоматиката Е1, Е2,...,Е14 бе създадена енергийната алгебра $\Omega$, с помощта на която се определиха равенствата пресмятащи енергийния баланс на системата "източник - материална точка М". Свойствата на тези равенства се определиха от теоремите Т5, Т6,...,Т49. С тяхна помощ бяха изследвани във времето всички възможни енергийни състояния на споменатата по-горе система.

Разграничиха се два характерни режима на поведение на системата

преходен и инвариантен, които се описват от поведението на функцията v(t) на скоростта на точката М. Това поведение зависи от параметрите (в случая, масата m) на точката и на средата, в която тя се движи (в случая, вискозитета ѝ $\mu$ и еластичността ѝ $C_l$).

Цялата енергийна теория на системата "източник - материална точка" се описва накратко от диаграмата (189). Според нея характеристиката на консумиращия енергия обект - множеството А определя изоморфно чрез алгебрата $\Omega$ енергийната му потребност $E_S$, т. е., минималната енергия, която трябва да притежава източникът, за да може системата да съществува. А алгебрата $\Omega$ е изоморфна, защото елементите на множествата А и $E_S$ са константи или еднозначни функции на времето t.

Ето това е енергийната теория на възможно най-елементарната механична система, т. е., на най-елементарния енергиен процес - процесът на енергийна консумация на материална точка. Всеки друг енергиен процес ще се описва от математично по-сложна теория илюстрирана от диаграмата:

$$B:(w, X) \xrightarrow{\alpha} E_S \qquad (190)$$

Тук B е характеристичното множество на консумиращия енергия обект, което се състои от функцията:

(191) $w = w(t)$,

която определя поведението му и функцията:

(192) $X = \{x_1, x_2, ..., x_i\}$,

която определя вътрешните (собствените) и външните (на околната среда) параметри. С $\alpha$ бележим алгебрата, която от характеристичното множество B определя множеството $E_S$ на енергийната потребност на обекта.

Алгебрата $\alpha$ ще бъде изоморфна, защото новата аксиоматика - да я наречем G1, G2,...,Gj - на която ще се подчинява множеството B, ще изисква елементите му да бъдат еднозначни функции на времето t. Друг вид функции на времето в природата не съществуват.

Елементите на множеството $E_S$ ще бъдат същите както на диаграмата (189), защото всяка енергия се измерва в джаули (J) независимо от природата (механична, топлинна, електрична, магнитна, електромагнитна, химична, ядрена и т. н.) на енергийния процес. Щом енергийната мяра остава една и съща, следва че съществува композицията:

(193) $\Omega = \alpha \circ \beta^{-1}$

такава, че:

(194) $B \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{\Omega} E_S$

Но множествата $E_S$ са ковариантно двойнствени, ако тълкуваме определението О17 само откъм консумативната страна на възможните енергийни пространства. Тогава и диаграмата:

$$B \xrightarrow{\beta} A \xrightarrow{\Omega} E_S \tag{195}$$

$$B \xrightarrow{\alpha} E_S$$

ще бъде двойнствена (ковариантно или контравариантно) на всички възможни енергийни диаграми, образувайки функтор с тях. Двойнствена ще бъде и аксиоматиката Е1, Е2,...,Е14 на всички възможни енергийни аксиоматики, както и теорията Т5, Т6,...,Т49 на всички възможни енергийни теории.

С това теоремата е доказана.

Теорема Т53. Аксиоматиката на инвариантните системи А1, А2,..., А7, както и теорията на инвариантните системи Т1, Т2,..., Т4 са двойнствени на всяка друга аксиоматика или теория на инвариантността.

Доказателство: Аксиомите А1, А2,..., А7 поставят основата на каквато и да е производствена система, чийто продукт x според теоремите Т1, Т2,..., Т4 зависи единствено от енергийния приток Ек, който действително се консумира от обекта.

Според теоремата Т52 енергийният приток Ек се изчислява по равенства двойнствено подобни помежду си. От друга страна, същият приток Ек според теоремата Т3 се определя изоморфно от поведението на продукта x, т. е., от функцията:

$$x = x(t) \tag{196}$$

(вж. диаграмата (3)), като за наличие на инвариантност според теорията Т5, Т6,...,Т49 е необходимо и постоянство на параметрите на обекта.

Тогава теоремата Т52 ни дава правото да съставим изоморфната диаграма:

$$\text{(197)} \qquad C:\{x(t), X\} \xrightarrow{\alpha} E_к(t)$$

където с а бележим енергийната алгебра преобразуваща характеристиката на обекта в минималната му енергийна потребност, която източникът трябва да осигури. Тук X е множеството:

$$\text{(198)} \qquad X = \{x_1, x_2,...,x_i\}$$

от параметри на обекта, които вече приехме за постоянни.

Диаграмата (197) ще бъде двойнствена (ковариантно или контравариантно) на всички възможни системни диаграми, образувайки функтор с тях, защото изоморфната алгебра а води до двойнственото на всички възможни енергийни множества множество Ек. Двойнствена ще бъде и аксиоматиката A1, A2,...,A7 на всички възможни системни аксиоматики, както и теорията T1, T2,...,T4 на всички възможни системни теории.

С това теоремата е доказана.

С доказването на теоремата T53 приключва излагането на теорията на инвариантните системи или накратко казано, теорията на инвариантността. Тя е класическа (нерелативна) теория и е валидна навсякъде, където можем да говорим за движение двойнствено от алгебрична гледна точка на движението в механиката на Нютон. За всяка друга механика ще е необходима нова аксиоматика различна от аксиоматиката E1, E2,..., E14 ново поняте за двойнственост и следователно, нова теория на инвариантността. Това ще проличи по-ясно от изложените по-долу примери.

# НЯКОИ ИНВАРИАНТНИ СВОЙСТВА НА МАТЕРИЯТА

Този раздел от научната разработка включва в себе си приложения на теорията на инвариантните системи, които я представят като гледна точка към някои свойства на материята, независимо от начина им на научно наблюдаване - в лабораторни или природни условия. И в двата случая става дума за свойства на материята, които не са резултат от технологичен процес и, в този смисъл, съществуват обективно и независимо от човека. Технологичният прогрес помага единствено за тяхното откриване и изследване.

Приложенията представляват познати, но погледнати през призмата на изложената теория примери от физиката. По този начин се цели да се очертае полезната област за прилагане на теорията като средство за научен подход при изследване на физични явления.

Преди да изложим примерите за приложения се налага да въведем понятието инвариантен преходен режим. Съществуването му се подсказва от теоремата Т4, в която се споменава за системи, при които процесът се движи по предварително зададена променлива във времето линия, без да се споменава за преход. Нека дадем следното:

**Определение О19.** Инвариантен преходен процес (режим) е този, който протича по крива, която при всеки преход се променя във времето $t$ от началото ($t = 0$) до края ($t \to \infty$) на прехода по един и същи начин.

**Теорема Т54.** Инвариантен преходен режим е възможен тогава и само тогава, когато импедансът в на системата (вж. равенството (161)) зависи единствено от честотата $\Omega$ (вж. равенствата (116) и (119)), т. е., системата е линейна.

Доказателство: Цитираните равенства (116), (119) и (119) се отнасят за постоянен (инвариантен) режим, при който честотата к се приема постоянна.

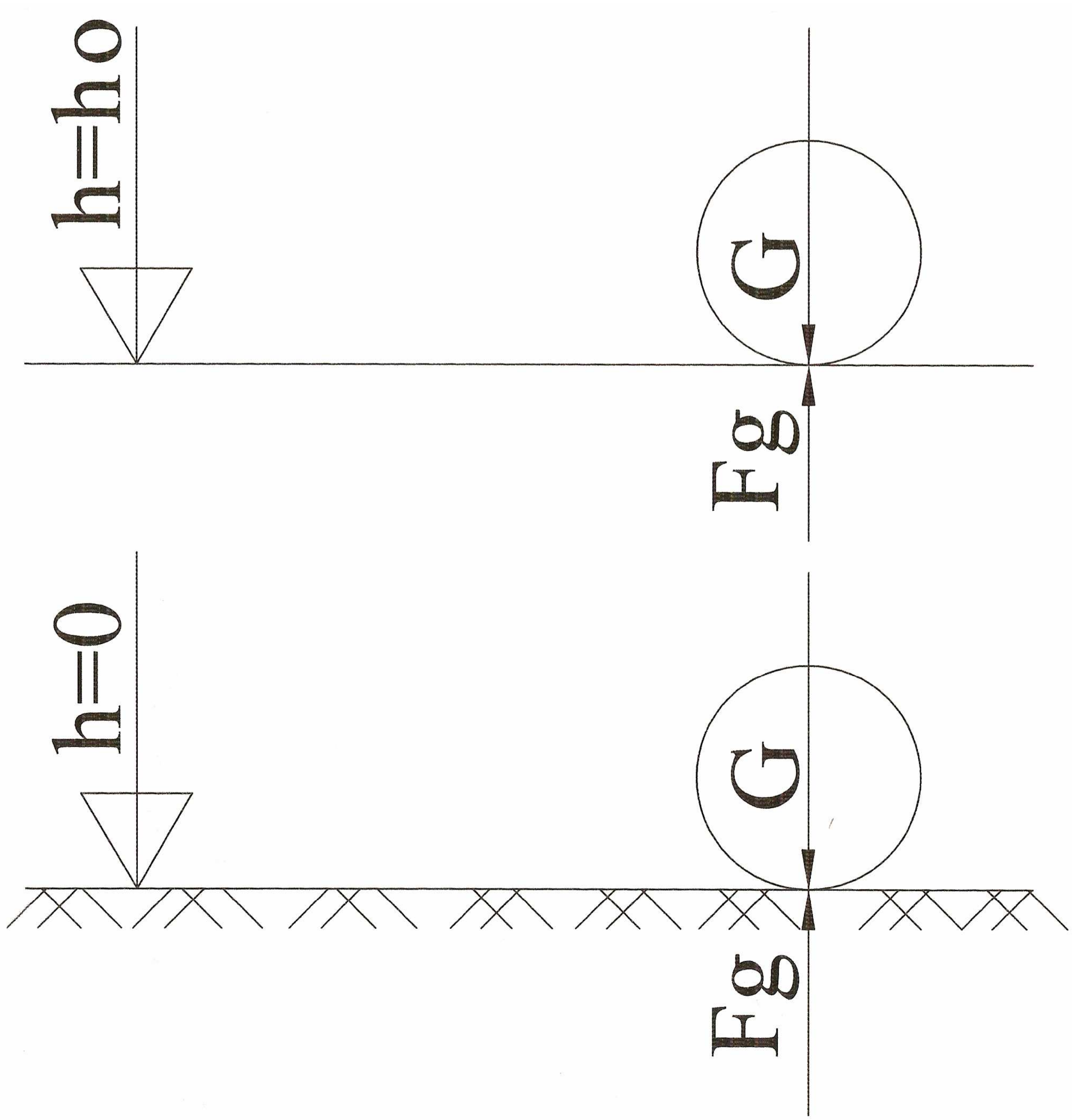
Ако в равенствата (116) и (119) положим к = 1 и приемем, че честотата $\Omega$ € $(-\infty, \infty)$, импедансът в от равенството (161) ще се отнася за преходен режим. И ако масата m от равенството (116) и модулът на еластичност $1/C_l$ от равенството (121) са постоянни, импедансът Г ще зависи единствено от честотата Ω.

Системата, според определението О16 е линейна и скоростта v(t) ще се диференцира и интегрира линейно по времето t (вж. равенствата (52) и (54), а това според теориемата Т21 значи, че при един и същи скоростен спектър V(iΩ) ще е налице един и същи силов спектър F(iΩ), т. е., инвариантната преходна скорост ще поражда инвариантна преходна съпротивителна сила.

С това теоремата е доказана.

**Пример П1 (гравитация).** Системата "Земя - притегляно тяло" е инвариантна по отношение величините скорост на тялото спрямо масата му, тегло - по отношение времето на притегляне и ударна сила при допира на тялото със Земята - по отношение времето или височината на притегляне (падане).

Доказателство: На фиг. 6 е изобразена системата "Земя - притегляно тяло" в състоянието, когато тялото е над Земята на височина h = ho и му предстои да падне и, когато е на височина h = 0 и вече е




Фиг. 6

паднало. И в двата случая то се намира в статично равновесие, така че на силата на теглото му G се противопоставя опорната реакция $F_G$ и то остава неподвижно. И понеже е неподвижно, скростта му v е нула и енергията, която тялото ще потребява от Земята, се нарича кинетична.

Тя ще бъде:

(199) $$Ec = \langle v,G\rangle = \langle v,F_G\rangle = 0.$$

което значи, че системата “Земя - притегляно тяло” е в състояние на статично безенергийно равновесие. То е инвариантно, защото всички величини в равенството (199) са константи. Случаят на безенергийна инвариантност не е интересен, защото моделира непроизводствен процес, с каквито авторът на тази теория не се занимава. Нека се спрем на случая, когато тялото се е освободило от горната опора и се намира на височината h, за която е в сила неравенството:

(200) $h_o \geq h \geq 0.$

Нека приемем, че разстоянието от височината $h_o$ до земната повърхнина, където h е нула, се изминава от тялото за времето $t_o$, т. е., по силата на неравенството:

(201) $0 \leq t \leq t_o.$

В сила ще въведем следните аксиоми, чиято вярност при определени условия е допустима и доказана от физиката:

**Аксиома Г1:** Съществува поне едно тяло с постоянна маса m (kg).

**Аксиома Г2:** Земята се стреми да притегли тялото от височината

$h_o$ до повърхнината си, упражнявайки върху него постоянното ускорение g ($m/s^{2)}$.

**Аксиома Г3:** При притеглянето тялото ще се движи към Земята, срещайки пренебрежимо съпротивление на въздуха и безветрие прието за пълно.

**Аксиома Г4:** Тялото ще се ускорява (съпротивлява на вселенската инерция) чрез силата на противоинерцията G = mg (N).

**Аксиома Г5:** Упражненото върху тялото земно ускорение g никога и никъде, където действа гравитачното поле на Земята, не може да се екранира или изолира.

Въз основа на аксиомите Г1, Г2, Г3, Г4 и Г5 ще докажем следните помощни теореми:

**Лема ЛГ1:** Фуриеровият образ $F_a(i\Omega)$ на упражняваното върху тялото в интервала по време (0,to) ускорение g е:

(202) $$F_a(i\Omega) = g(\exp(-i\Omega t) - 1)/(-i\Omega\cdot\sqrt{2\pi}).$$

Доказателство: От определението за фуриерово преобразуване (вж. равенствата (34)) образът на функцията

(203) $$a(t) = g$$

ще бъде:

(204) $$F_a(i\Omega) = (1/\sqrt{2\pi})\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g(\exp(-i\Omega t)dt$$

Решаването на интеграла (204) ще доведе до равенството (202), с което лемата е доказана.

**Лема ЛГ2:** Политайки към Земята, в момента to тялото ще придобие скоростта v(t) с ефективна стойност V по равенството:

(205) $$v(t) = V = gto,$$

т. е., тялото е извършило преходен процес (движило се е в преходен режим).

Доказателство: Според теоремата Т6 скоростта v(t) на тялото ще бъде:

$$v(t) = \int_{o}^{to} g\,dt \qquad (206)$$

Решаването на интеграла (206) ще доведе до равенството (205). От друга страна, ако по правилото (31) изчислим ефективната стойност V на скоростта, тя също ще доведе до резултата (205). Това значи, че ефективната стойност V на скоростта на тялото е променлива във времето t. Тялото се е движило в преходен режим.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛГ3:** Фуриеровият образ $F_v(i\Omega)$ на скоростта v(t) на падащото в интервала по време (0,to) тяло е:

(207) $F_v(i\Omega) = g(\exp(-i\Omega t) - 1)/(-i\Omega\cdot\sqrt{2\pi}\cdot i\Omega)$

Доказателство: Щом скоростта v(t) на тялото представлява интегралът на ускорението му a(t), опирайки се на равествата (58) и (59) от теоремата Т21, които доказват две особено важни свойства на фуриеровото преобразуване, стигаме до извода, че:

(208) $F_v(i\Omega) = F_a(i\Omega)/(i\Omega)$

Замествайки изразът за Fa(iΩ) от равенството (202) в равенството (208), ще получим точно равенството (207), с което лемата е доказана.

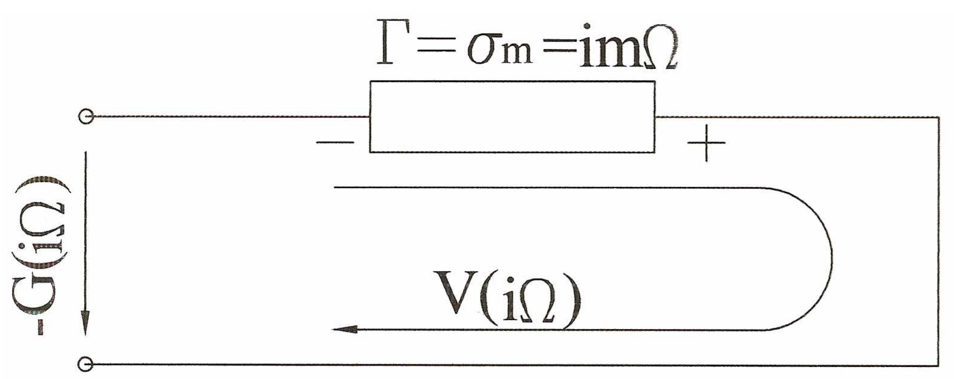
**Лема ЛГ4:** Движението на тялото в интервала по време (0, to) или равносилно в интервала по височина (ho, 0) се извършва в антиинерционна среда, характерна с импеданса:

(209) $\Gamma = \sigma_m = im\Omega$

Доказателство: Според аксиомата Г4 тялото ще се ускорява от Земята със силата на теглото си $G = mg$. Съдейки за фуриеровия образ $F_a(i\Omega)$ на ускорението g по равенството (202), фуриеровият образ $F_G(i\Omega)$ на тази сила ще бъде:

$$(210) \qquad F_G(i\Omega) = mF_a(i\Omega) = mg(\exp(-(i\Omega)t) - 1)/(- i\Omega\cdot\sqrt{2}\,\pi)$$

Изразът (210), обаче, представлява произведението на фуриеровия образ $F_v(i\Omega)$ на скоростта на тялото от равенството (207) по импеданса от равенството (209). Това значи че, средата на гравитачното поле, в което се движи тялото, се характеризира еднозначно и инвариантно (вж. аксиомата Г1) от импеданса (209). В сила ще бъде заместващата електрична схема на фиг. 7.




Фиг. 7.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛГ5:** В момента to или равносилно на земната повърхнина, където h = 0, тялото ще нанесе удар с енергия:

$$(211) \qquad E_S = mg^2to^2/2$$

и мощност:

$$(212) \qquad S = d/dt(E_S) = d/dt(mg^2t^2/2)\Big|_{t = to} = mgto$$

Доказателство: Съдейки по равенствата (207) и (209) енергийната система "Земя - притегляно тяло" ще се характеризира от функцията:

$$(213)\qquad A: (F_v(i\Omega),\ \Gamma = \sigma_m = im\Omega \xrightarrow{\acute{\Omega}} E_S,$$

където A е характеристичното множество на системата, състоящо се от фуриеровия образ $F_v(i\Omega)$ на скоростта $v(t)$ на тялото и импеданса в, който среща то в преходното си движение. Буквата $\acute{\Omega}$ над стрелката е различна по смисъл от честотата $\Omega$ в скобите на характеристичното множество A. Над стрелката тя има смисъл на определената чрез равенството (188) енергийна алгебра и представлява композицията:

$$(214)\qquad \acute{\Omega} = \cdot\Gamma \circ \langle F_v(i\Omega),F_G(i\Omega)\rangle$$

С други думи, инвариантите на системата m и g напълно описват характеристичното й множество (213).

Е, нека най-после изчислим енергийния баланс на падащото тяло.

Той е:

$$(215)\qquad \langle F_v(i\Omega),F_G(i\Omega)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [mg(\exp(-i\Omega to)-1/(-i\Omega\cdot\sqrt{2\pi})\cdot$$

$$\cdot g(\exp(-i\Omega to)-1)/(\ \Omega^2-\sqrt{2\pi})]d\Omega =$$

$$= [(mig^2)/\pi]\cdot\int_{-\infty}^{\infty}[(1-\cos\Omega to)/\Omega^3]d\Omega =$$

$$= 2[(mig^2)/\pi]\cdot\int_{-\infty}^{\infty}[(1-\exp\Omega to)/\Omega^3]d\Omega =$$

$$= mg^2to^2/2 = E_S$$

Крайният резултат от равенството (215) съвпада с твърдението (211). Ако го диференцираме по времето t ще постигнем твърдението (212).

С това лемата е доказана.

**Лема ЛГ6:** Моментът to на удара на тялото със Земята се определя от височината ho на падането му по равенството:

$$(216) \qquad to = \sqrt{}2gho$$

Доказателство: Ако, следвайки логиката от диаграмите (10) и (11) - вж. теоремата Т5 - интегрираме по времето t равенството (205), ще получим:

$$(217) \qquad s(t) = \int_{o}^{to} gt\cdot dt = gto^2/2 = ho$$

Преобразувайки равенството (217) като явна функция на времето t ще получим равенството (216).

С това лемата е доказана.

**Доказване на примера (системните инвариантности):** Нека представим равенствата (206) и (205) чрез характеристична функционална диаграма подобна на диаграмата (213). Тя ще има вида:

$$\text{(216.1)} \qquad B: (t,g) \xrightarrow{\acute{\Omega}} v,$$

където $\acute{\Omega}$ -алгебрата представлява скаларното произведение:

$$\text{(217.1)} \qquad \acute{\Omega} = \langle 1,g \rangle = \int_{o}^{t} g\,dt$$

Характеристичното множество B на системата според (216.1) не зависи от масата на тялото, а според (217.1) - и $\acute{\Omega}$-алгебрата й. Следователно, множествата (216.1) и (217.1) са съставени от инварианти спрямо масата на тялото и неговото падане ще се извършва според (205) равноускорително, като скоростта на падане ще зависи единствено от продължителността на падането to.

Според аксиомата Г4 теглото на тялото G се определя по равенството:

$$\text{(218)} \qquad G = mg$$

или характеристичното му представяне следва да бъде

$$\text{(219)} \qquad C: (m,g) \xrightarrow{\acute{\Omega}} G$$

Тук к-алгебрата се състои единствено от операцията умножение, т. е.,

$$\text{(220)} \qquad \acute{\Omega} = \cdot g$$

Характеристичното множество C на системата според (219) не зависи от времето t, а според (222) - и Ώ-алгебрата й. Следователно, множествата (219) и (220) са съставени от инварианти спрямо времето на падане на тялото to, от което следва, че и ударната сила върху земята в момента to също ще бъще инвариантна спрямо него. А щом е инвариантна спрямо времето to, то спрорд равенствата (216) и (217) тя ще инвариантна и спрямо височината на падането ho. Преходът на тялото от височината ho до земната повърхнина (височината 0) според теоремата T54 е инвариантен по всичките показатели на първоначалното твърдение.

С това примерът е доказан.

Разбира се, доказателството на горните факти води началото си от опитите на Галилей преди повече от 400 години. Това, обаче, съвсем не е попречило на Нютон - роден една година след смъртта на Галилей - да преосмисли тези факти, формулирайки ги математично в светлината на всемирната гравитация. Нека ги преосмислим в светлината на природната инвариантност. Дотук показахме, че тя съществува. Да се насочим към разковничето на оползотворяването й.

Равенството (211) сравнено с равенството (217) говори, че ударната енергия на тялото върху Земята е пропорционална на височината на падането му, а равенството (212) сравнено с равенството (205) - че мощността на този удар зависи от скоростта на това падане. И ако повторим опитите на Галилей отпреди повече от 400 години да пускаме в качеството на твърдо тяло камък от една постоянна височина, (примерно, височината на Наклонената кула в Пиза) ще стигнем до извода, че земното гравитачно поле е инвариантен източник на ударна енергия, защото характеристичното множество на функцията (213) при тази постоянна височина ще бъде инвариантно. Мощността на този източник, съдейки по равенството (212) свързано с равенството (215), ще бъде също инвариантна.

Енергията на земното гравитачно поле, както ще видим вследващия раздел, се използва за защитни нужди, защото според аксиомата Г5 гравитачното поле не може да се екранира (изолира) и гравитачната оперативна енергия винаги и навсякъде е налице.

**Пример П2 (електропроводимост).** Системата “източник - електро-потребител” е инвариантна в безпреходен режим по отношение величините ток, напрежение, мощност и енергия при стабилен енергиен източник (напрежението му се променя само по желание на човек) и постоянна топлинна обмяна между електричната верига и околната среда.

Доказателство: Нека се опрем на следната аксиоматика:

**Аксиома АП1.** Съществуват метали и метални сплави валцувани с постоянно сечение.

**Аксиома АП2.** Валентните електрони на металите и сплавите са

свободни и се движат хаотично, като всеки от тях изминава в околността

на $20^{o}$ C измервания в метри пробег:

(225) $$L = 1/T,$$

където T е абсолютната температура, до която е нагрят метала. За различните метали и сплави пробегът L е различен.

**Аксиома АП3.** Времето з на пробега L на свободния валентен

електрон в метала (свободния пробег) наричаме период на електрона, който се определя по равенството:

(226) $$\tau = L/v_T,$$

където $v_T$ е средната скорост, с която електронът изминава свободния си пробег. За различните метали и сплави $v_T$ е различна.

**Аксиома АП4.** Хаотичното движение на свободните електрони не води нито до потребяване, нито до генериране на енергия.

**Аксиома АП5.** Всеки електрон, свободен или не, притежава постоянна веществена механична маса m, измервана в килограми (kg) и постоянна полева електрична маса e, измервана в кулони (q), представляващи обобщеното име на амперсекунди (As).

**Аксиома АП6.** Съществува енергиен източник, който е в състояние да превърне хаотичното движение на свободните електрони в еднопосочно движение по еквидистантни траектории.

**Аксиома АП7.** Траекториите, по които биха се движили електроните, представляват линии на пространственото разпределение на енергията на източника, но се наричат не енергийни, а - силови линии.

**Аксиома АП8.** Енергията на източника има полева форма на съществуване и характеристиките на силовите му линии определят еднозначно и пълно енергийното му поле.

**Аксиома АП9.** Източникът притежава два полюса: положителен (анод), който привлича свободните елекрони и отрицателен (катод), който ги отблъсква.

**Аксиома АП10.** Ако свържем двата полюса - анода и катода - на източника с валцувания метал или сплав, той ще упражни върху всеки свободен електрон на метала силата

(227) $$Fe = eE,$$

където с E бележим т. н. напрегнатост на излъчваното от източника енергийно поле, която измерваме във (W/Am).

**Аксиома АП11.** Напрегнатостта E на полето на източника е постоянна и е инвариантна от свойствата на метала или металната слав.

**Аксиома АП12.** Срещу генерираната от източника сила Fe свободният електрон противопоставя двигателната инерционна сила

(228) $$Fa = ma,$$

където с a бележим постоянното ускорение, което ще придобие електронът под действието на силата Fe.

А сега нека докажем следните помощни теореми:

**Лема ЛП1.** Ускорението, което ще придобие електронът под действието на силата Fe ще бъде:

$$a = eE/m \tag{230}$$

Доказателство: Ако приемем, че под действието на полето на източника електронът се движи по някоя силова линия, той ще се намира в динамично равновесие. Това значи, че упражнената върху него според равенството (227) сила на източника Fe и инерционната двигателна сила Fa (вж. равенството (228)) са равни. Тогава ако приравним десните страни на равенствата (227) и (228), ще постигнем равенството (230).

С това лемата е доказана.

Лема ЛП2. В интервала от момента на включването на източника до момента t електронът ще придобие скоростта:

$$v_E = \int_o^t (eE/m)dt = (eE/m)t \tag{231}$$

Доказателство: След непосредствено интегриране по времето t на ускорението на електрона от равенството (230) ще постигнем равенството (231).

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП3.** В интервала от момента на включването на източника до момента t електронът ще измине пробега

$$(232) \qquad h = \int_0^t v_E dt = eEt^2/2m$$

Доказателство: След непосредствено интегриране по времето t на ускорението на електрона от равенството (231) ще постигнем равенството (232).

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП4.** Времето, през което електронът притежава пълната вероятност да е в движение, е времето на свободния му пробег τ (вж. равенството (226) в аксиомата АП3).

Доказателство: Времето на свободния пробег τ на електрона в равенството (226) на аксиомата АП3 е инвариантно спрямо напрегнатостта Е на полето на източника. Следователно, свободният електрон не може да се движи по-продължително от периода си τ.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП5.** За времето τ на свободния си пробег ускореният от полето на източника електрон ще се движи със средната скорост:

$$(233) \qquad v = h/\tau = eE\tau/2m$$

Доказателство: Замествайки в дясната страна на равенството (232) времето t с периода на свобония електрон τ и изпълнявайки междинното действие в равенството (233), ще постигнем крайния резултат на това равенство.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП6.** В интервала от момента на включването на източника до момента t и при средната скорост от равенството (233) електронът ще придобие (пренесе) електроенергията:

$$(234)\qquad We = \int_{o}^{t} v\cdot F_e dt = \int_{o}^{t} (eE\tau\cdot eE/2m)dt.$$

Доказателство: Скаларното умножаване на скоростта на електрона която според равенството (233) той е придобил от полето на източника, по силата упражнена върху него според равенството (227) ще даде точно равенството (234).

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП7.** В интервала от момента на включването на източника до моментa t обемната плътност на пренасяната в метала енергия ще бъде

$$(235)\qquad dW/dV = nWe = \int_{o}^{t} (ne^2E^2\tau/2m)dt = \int_{o}^{t} \Gamma\cdot E^2 dt,$$

където с n бележим броя електрони в единица обем от метала, а величината:

$$(236)\qquad \Gamma = ne2\tau/2m,$$

наричаме специфична електропроводимост на метала, тъй като от нейната стойност зависи стойността на провеждането (пренасянето) на енергия през него. Точният й физически смисъл, както и измервателните й единици ще се посочат по-долу, а валцуваният с постоянно сечение метал ли сплав занапред ще наричаме електропроводник или накратко - проводник.

Доказателство: Умножавайки с n двете страни на равенството 34), ще постигнем двата междинни резултата от равенството (236), а полагайки частното ne2τ/2m равно на Γ, ще постигнем крайния резултат от същото равенство. От друга страна произведението nWe има размерност на енергия в единица обем ($W/m^3$) и, ако с буквата V бележим обема на целия проводник, то наистина в лявата страна на равенството (235) имаме правото да напишем частното $dW/dV$.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП8.** Електричната маса (зарядът) на целия проводник е

(237) $q = neV = nels,$

където с l бележим дължината на проводника (m), а с s - лицето на напречното му сечение ($m^2$).

Доказателство: Произведението ne има качеството на специфичната обемна електрична маса на проводника. Следователно, произведението neV ще има качеството на цялата електрична маса в проводника, а щом обемът му е произведението ls, крайният резултат в равенството (237) е верен.

С това теоремата е доказана.

**Лема ЛП9.** Скоростта i на пренасяната през проводника електрична

маса наричаме електричен ток, който се измерва в ампери (A) и е равен на:

(238) $i = dq/dt = nes \cdot dl/dt = nesv.$

Доказателство: Двустранното диференциране по времето t на равенството (237) ще доведе до резултата (238).

С това лемата е доказана.

Лема ЛП10. Гъстотата $\delta$ на токовите линии - силовите линии на полето на източника, който занапред ще наричаме електричен източник - по които в проводника се движи целият електронен поток е:

(239) $\delta = i/s = nev = ne^2E\tau/2m$

Доказателство: Частното $i/s$ има качеството на гъстота, която се измерва в ($A/m^2$). Следователно, ако разделим на $s$ десните страни на равенствата (238) и (236) ще достигнем до равенството (239).

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП11.** Гъстотата $\delta$ на токовите линии в проводника се определя от величината

(240) $\Gamma = ne2\tau/2m$,

която нарекохме в лемата ЛП7 специфична електропроводимост или накратко - проводимост, по равенството:

(241) $\delta = \Gamma E$

Доказателство: Замествайки с $\Gamma$ в равенството (239) израза $ne2\tau/2m$, ще постигнем равенството (241), което представлява законът на Ом в т. н. диференциален вид.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП12.** Проводимостта в на проводника е инвариантна спрямо полето (напрегността Е на полето) на източника.

Доказателство: В определящото за понятието проводимост равенство (240) напрегнатостта Е на полето на източника не участва. От друга страна, според аксиомата АП11 напрегнатостта Е на източника е инвариантна от свойствата на метала - наричан вече проводник. А това значи, че полето на източника не променя проводимостта на проводника.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП13.** Величината $\sigma$, която е обратна на специфичната проводимост в на проводника съгласно равенството

(242) $\sigma = 1/\Gamma$

и, която наричаме специфично електросъпротивление или накратко - специфично съпротивление на проводника, е инвариантна спрямо полето (напрегността E на полето) на източника.

Доказателство: Щом в дясната страна на равенството (242) величината Г, както доказва лемата ЛП12 е инвариантна спрямо полето (напрегността E на полето) на източника, това значи, че и обратната й величина е от равенството (242) е също инвариантна спрямо същата величина E.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП14.** Цялата пренасяна през проводника енергия W се определя по равенството:

$$(243) \qquad W = \int_{o}^{t} \delta E s l \cdot dt = \int_{o}^{t} iudt,$$

където с u бележим величината:

$$(244) \qquad u = El,$$

която наричаме напреженов пад създаден от проводника или напрежение върху проводника. Измервателната единица за напрежението е волтове (V), както за потенциала U на електричния източник (вж. аксиомата АП13).

Доказателство: Ако крайният резултат в равенството (235) се отбележи с буквата A, ще излезне, че:

$$(245) \qquad A = \int_{o}^{t} \Gamma E^2 dt$$

От друга страна, съдейки по същото равенство, енергията пренасяна през целия обем на проводника (целия проводник) ще бъде:

$$(246) \qquad W = \int_{o}^{V} A dV = \int_{o}^{l} Asdl = Asl$$

Замествайки в крайния резултат от равенството (246) A от равенството (245) и, имайки предвид проводимостта δ на проводника от равенството (241), ще постигнем междинния резултат от равенството (243). А ако в този междинен резултат от същото равенство, вземем предвид и новоопределената величина u от равенството (244), ще постигнем крайния резултат от равенството (243).

Величината u от равенството (244), имайки предвид аксиомата АП10, се измерва във ватове на ампер (W/A) или, както казахме вече, съкратено - във волтове (V).

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП15.** Цялата пренасяна през проводника енергия W се определя и по равенството:

$$(247) \qquad W = \int_{o}^{t} i^2 Rdt = \int_{o}^{t} (u^2/R)dt,$$

където величината R, определена по равенството:

$$(248) \qquad R = u/i = \sigma l/s,$$

представляващо закона на Ом, наричаме съпротивление (импеданс) на проводника. Тя се измерва във волтове на ампер (V/A) или накратко - в омове (Ω).

Доказателство: Ако имаме предвид истините (239), (241) и (242), междинният резултат на равенството (243) може да претърпи еквивалентните преобразувания:

$$(249)\qquad W = \int_o^t \delta E s l dt = \int_o^t (\delta^2 s l/\Gamma) dt = \int_o^t \delta^2 s^2 (el/s) dt =$$

$$= \int_o^t i^2 R dt = \langle i, iR \rangle$$

А ако се имат предвид истините (241), (242) и (244), същото равенство може да се преобразува така:

$$(250)\qquad W = \int_o^t \delta E s l dt = x \int_o^t (E^2 s l/\Gamma) dt = \int_o^t E^2 l^2 (s/\sigma l) dt =$$

$$= \int_o^t (u^2/R) dt = \langle u, u/R \rangle$$

С това лемата е доказана.

Тук е мястото да отбележим, че щом величината R -

съпротивлението на проводника - се измерва в омове ($\Omega$), то величината $\sigma$ - специфичното съпротивление на проводника - съдейки по равенството (248) следва да се измерва в омове по метър ($\Omega$m). От друга страна е прието обратната величина на съпротивлението, която наричаме проводимост на проводника:

(251) $$G = 1/R$$

да се измерва в сименси (S). След преобразуване на равенството (250), имайки предвид условията (242) и (251), се стига до извода, че цялата пренасяна през проводника енергия W се определя еквивалентно и по равенството:

(252) $$W = \int_{o}^{t} (u^2 G)dt = \langle u,uG \rangle = \int_{o}^{t} (u^2 (s/\sigma l))dt,$$

от което следва, че проводимостта G на проводника е равна на:

(253) $$G = s/\sigma l = s\Gamma/l$$

Съдейки по равенството (253), специфичната проводимост на проводника следва да се измерва в сименси на метър (S/m).

**Ώ - и α-алгебра. Съществуване и приложения.**

**Лема ЛП16.** Съществува δ-алгебра, описваща преобразуването на

топлинната енергия към проводника (абсолютната температура на проводника) в механична енергия на хаотичното движение на свободните му електрони, притежаващи скоростта vT и периода τ.

Доказателство: Оглеждайки равенствата (225) и (226), стигаме до извода, че е в сила диаграмата от последователни преобразувания:

$$\begin{array}{ll} & \quad\;\; \cdot T^{-1} \quad\;\; \cdot 1/v_T \\ (254) & T\text{------}{>}L\text{-------}{>}\tau \end{array}$$

Това значи, че композицията:

(255) $\delta = \cdot T^{-1} \circ \cdot 1/vT$

извършва преобразуването на характеристичното множество X в множеството τ по диаграмата:

(256) $X:\{T, vT\} \xrightarrow{\delta} \tau$

Елементите на композицията δ образуват мултипликативна алгебрична структура. Да я наречем δ-алгебра.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП17.** Съществуват инвариантните:

- Г-алгебра, описваща преобразуването на енергията на източника в електричната сила Fe упражнена върху свободен електрон в проводника по диаграмата:

(257) $G:\{e,E\} \xrightarrow{\Gamma} Fe,\ \Gamma = \cdot E$

(вж. равенството (227);

- π-алгебра, описваща противодействието на механичната маса m на електрона срещу електричната му маса e чрез силата Fa по диаграмата:

(258) $P:\{m,a\} \xrightarrow{\pi} Fa,\ \pi = \cdot a$

(вж. равенството (228);

- Σ-алгебра, описваща динамичното равновесие на електрона по диаграмата:

$$\text{(259)}\qquad F:\{Fe,Fa\}\xrightarrow{\Sigma}\{Fe=Fa,Fa=Fe\},\ \Sigma = \text{“=”}$$

- μ-алгебра, описваща ускоряването на електрона по диаграмата:

$$\text{(260)}\qquad F:\{Fe,Fa\}\xrightarrow{\mu}\{a,eE/m,\ (a=eE/m)\},\ \mu = \cdot 1/m$$

(вж. равенството (230));

- съставната $\theta^2$-алгебра, описваща изминатия под действието на полето на източника свободен пробег h на електрона по диаграмата:

$$\text{(261)}\qquad A:a\xrightarrow{\theta^2}h,\ \theta = \int_{o}^{t}\cdot dt$$

(вж. равенствата (231 и (232));

- φ-алгебра, описваща средната скорост v на електрона под действието на полето на източника по диаграмата;

$$\text{(262)}\qquad H:\{h,\tau\}\xrightarrow{\varphi}v,\ \varphi = \cdot 1/\tau$$

(вж. равенството (233));

- Ф-алгебра, описваща пренасяната през проводника от един електрон енергия We по диаграмата:

$$\Phi$$

(263) U:{v,Fe}--->We, $\Phi$ = < , >

(вж. равенството (234)).

- ε-алгебра, описваща пренасяната през проводника от всички свободни електрони енергия W по диаграмата:

$$\varepsilon$$

(264) V:{We}--->W, ε = ·nsl,

(вж. равенствата (237, (238),...(243) или в равенството (243) заместете л от (241) и след това - в от (240)).

Доказателство: Следвайки логиката на лемата ЛП16, диаграмите (257), (258),...,(264) образуват алгебрични структури и заслужават имената си -алгебра. Те са инвариантни, защото характеристичните им множества X, G, P, F, A, H, U и V са съставени от независими една спрямо друга променливи.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП18.** Множеството:

(267) Ώ:{δ, Γ, π, Σ, μ, $\theta^2$, φ, Φ, ε}

образува Ώ-алгебра по смисъла на определението О18. Тъй като елементите на Ώ не образуват последователен композиционен ред, нека наречем този вид множество прекъсната алгебра.

Доказателство: След оглеждане на определинието О18, се стига до тривиалното заключение, че твърдението ЛП18 е истина.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП19.** Съществува β-алгебра по смисъла на теоремата Т52,

описваща преобразуването на скоростта v на свободен електрон в проводника в тока i, протичащ през него и електричната сила

Fe упражнена върху електрона от полето на източника в напрежението u на полюсите му по диаграмата:

$$(268)\qquad \{v, Fe\}\xrightarrow{\beta^{-1}}\{i, u\},$$

по такъв начин, че равенството (243) остава в сила.

Доказателство: Според лемата ЛП18 к-алгебрата преобразува характеристичните множества X, G, P, F, A, H, U и V в енергийното множество W по диаграмата:

$$(269)\qquad Y:\{X, G, P, F, A, H, U, V\}\xrightarrow{\Omega}W,$$

като множеството W се представя във вида:

$$(270)\qquad W = nsl\cdot\langle v,Fe\rangle = nsl\cdot\int_o^t(eE\tau/2m)\cdot eEdt$$

Ако в равенството (270) извършим умножението под знака интеграл и след прегрупиране положим, както в равенството (238):

$$(271)\qquad vnse = (eE\tau/2m)\cdot nse = i$$

и, както в равенството (244):

$$(272)\qquad Fe\cdot(l/e) = El = u,$$

ще излезне, че твърдението (268) е истина. При това следва да приемем, че:

$$(273)\qquad \beta^{-1} = \{\cdot nse, \cdot l/e\}$$

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП20.** Съществува а-алгебра по смисъла на теоремата Т52, представляваща композицията (вж. равенствонто (193)):

(274) $\alpha = \beta \circ \acute{\Omega}$,

чрез която множеството от електрични величини {i, u} се преобразува в енергийното множество W по диаграмата:

(275) $\{i, u\} \xrightarrow{\alpha} W$

Доказателство: Според лемата ЛП19 множеството от величини с механична мяра Y се преобразува в енергийното множество W по диаграмата (269). Същото множество чрез $\beta^{-1}$-алгебрата се преобразува по същата лема в множеството с електрична мяра {i, u}. С други думи, можем да съставим диаграмата:

(276) $\{i, u\} \xleftarrow{\beta^{-1}} Y \xrightarrow{\acute{\Omega}} W.$

което значи, че можем да съставим и диаграмата:

(277) $\{i, u\} \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\acute{\Omega}} W$

Това от своя страна значи, че наистина съществува композицията (274), която води до диаграмата:

(278) $\{i, u\} \xrightarrow{\alpha} W$

С това лемата е доказана.

Инварианти и инвариантности.

**Лема ЛП21.** α-алгебрата е инвариантна при топлинно равновесие на проводника (T = const).

Доказателство: Според лемата ЛП16 δ-алгебрата е неинвариантна, защото скоростта vT на свободния електрон в проводника зависи от абсолютната температаура T на проводника. Според лемата ЛП17 всички останали елементи (алгебри) на множеството Ώ (вж. (267) от лемата ЛП18) са инвариантни. С други думи, Ώ-алгебрата ще бъде инвариантна, само ако абсолютната температура T на проводника е постоянна (проводникът се намира в топлинно равновесие). При същото условие според лемата ЛП19 ще бъде инвариантна и δ-алгебрата, а според лемата ЛП20 - и α-алгебрата.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛП22.** Скаларните произведения:

(279) $$\langle u,i\rangle = \langle i,iR\rangle = \langle u,uG\rangle = W$$

са инвариантни при топлинно равновесие на проводника и принадлежат на енергийното пространство E(1).

Доказателство: Енергийното равенство (279) е доказано в лемата ЛП15 и затова е истинно. Според равенството (251) от същата лема величините проводимост и съпротивление - G и R на проводника са реципрочни и, следователно, ако едната е инвариантна, инвариантна е и другата.

Според равенството (248) съпротивлението R на проводника зависи от дължината му l, напречното му сечение s и специфичното съпротивление σ на материала, от който той е направен. А според лемата ЛП19 тези четири величини са елементи от множеството Y. Те са инвариантни при топлинно равновесие на проводника, при което е инвариантна както Ώ-, така и α-алгебрата, която прави реална веригата от равенства (279).

Според равенството (279) можем да напишем, че:

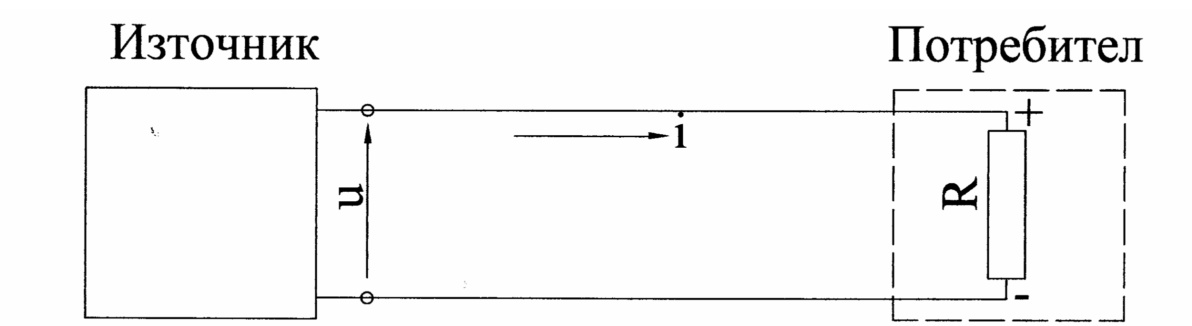
(280) $$(\langle u,i\rangle)^2 = (\langle i,iR\rangle)^2 = (\langle u,uG\rangle)^2 = W^2,$$

което съобразно теоремата Т42 говори, че енергийният баланс на електричната система се изчислява в пространството Е(1).

С това лемата е доказана.

**Доказване на примера (системните инвариантностти).** Според условията на твърдението на примере, системата "източник - електропотребител" е инвариантна.

Доказателство: Нека изобразим чрез фиг. 8 електросистемата "източник - потребител".




Фиг. 8

При стабилен енергиен източник (напрежението му се променя само по желание на човек) и постоянна топлинна обмяна между електричната верига и околната среда такава, че температурата на съпротивленията $R_k$ (на консуматора) и $R_L$ (на линията) да остават постоянни, системата ще бъде инвариантна по ток, напрежение (напреженови падове), енергия и след диференциране по времето t на равенствата (250) и (252), добивайки:

(281) $$P = ui = i^2R = u^2G, \text{ при това } R = R_k + R_L$$

и по мощност в условията на безпреходен режим.

С това примерът е доказан.

**Пример П3 (квантова инвариантност).** Атомната система "протон - електрон" на водорода притежава инвариантни състояния на пълната си енергия (шрьодингеровата хамилтониана) по отношение на скоростта на протона и електрона.

Доказателство: Нека се опрем на следната аксиоматика:

**Определение О20.** Атом е най-малката частица на химичен елемент, притежаваща химичните му свойства.

**Аксиома АК1.** Атомът е съставен от ядро с положителна електрична маса (заряд) и движещи се около ядрото отрицателно заредени електрони.

**Аксиома АК2.** Атомното ядро се състои от елементарни частици наречени нуклони.

**Аксиома АК3.** Нуклоните, носещи положителния заряд на ядрото се наричат протони, а електрически неутралните нуклони - неутрони.

**Аксиома АК4.** Абсолютната стойност на електричната маса на протона и електрона са еднакви.

**Аксиома АК5.** Броят на протоните в инвариантен (нейонизиран) атом е равен на броя на обикалящите около ядрото му електрони.

**Аксиома АК6.** Броят на неутроните в атомното ядро е равен или по-голям от броя на протоните в него. Изключение правят атома на водорода, хелия и др. наскоро открити т. н. неутронодефицитни атоми.

**Аксиома АК7 (първи постулат на Бор).** Съществуват безпреходни състояния на атома, в които той не излъчва електромагнитна енергия, независимо че електроните около него притежават ускорения.

**Аксиома АК8 (втори постулат на Бор).** В безпреходното състояние на атома всеки негов електрон се движи по кръгови орбити около ядрото му, като кинетичният му момент има дискретни (квантувани) значения, удоволетворяващи условието:

(282) $M_q = m_e v_n r_n = n/2\pi h$,

където $m_e$ е масата на електрона, $v_n$ - орбиталната му скорост, $r_n$ - орбиталният му радиус, n - номера на орбитата, който е цяло различно от нула число, h - известната костанта на Планк.

**Аксиома АК9 (трети постулат на Бор).** Съществуват преходни състояния на атома, при които негов електрон преминава от орбита m на орбита n и обратно. При m < n електронът поглъща, а при m > n - излъчва един квант електромагнитна енергия Q в обхвата на светлинните честоти по равенството:

(283) $Q = h\Omega_{mn} = Q_m - Q_n$

като квантовата честота kmn е:

(284) $\Omega_{mn} = (Qm - Qn)/h$

**Аксиома АК10.** Постулатите на Бор нямат двойнствено подобие с изложената до този пример теория на инвариантността, защото се обясняват въз основа на квантовата механика.

**Аксиома АК11.** Квантовата механика не е следствие от класическата, въз основа на която е изградена до този пример теорията на инвариантността

**Аксиома АК12.** Под орбита на електрона не се разбира равнинна крива измежду коничните сечения, по каквито се движат небесните тела, а електрично кулоново поле във вид на зареден "облак", в който вероятно се намира електронът. Максималната плътност на облака (плътност на вероятността) е на разстояние от ядрото равно на радиуса по равенството (282).

**Аксиома АК13.** Безпреходните според първия постулат на Бор състояния на атома представляват стационарни състояния на движението на електроните му в кулоново поле по вероятни траектории, които се описват от решението на съответното за всеки електрон уравнение на Шрьодингер (тук то не е посочено).

**Аксиома АК14.** Орбиталните енергийни съставки $Q_m$ и $Q_n$ в равенството (283) наричаме кинетични енергии на състоянията на електрона. Те се приемат с отрицателни знаци.

**Аксиома АК15.** Максималната положителна, изчислена по

равенството (283) енергия, над която електронът напуска полето на ядрото на атома, превръщайки го в положителен йон, наричаме енергия на йонизацията на атома. Максималната отрицателна енергия по същото равенство, която притегля електрона към полето на атома, наричаме енергия на връзката на електрона с ядрото. Двете енергии имат еднакви абсолютни стойности.

**Аксиома АК16.** Излъчваните от електрона енергии при йонизиран атом притежават непрекъснат (аналогов) честотен спектър.

**Аксиома АК17.** Атомът на водорода се състои от ядро с един протон и един електрон около него.

**Определение О21.** Величината характеризираща способността на електричното поле да преминава през електрически непроводима материя (диелектрик) наричаме диелектрична проницаемост. Тя се измерва във фаради на метър (F/m). Физичното тълкуване на мярата е сложно и тук не се прави.

**Аксиома АК18.** Протонът и електронът създават около себе си кулоново поле с напрегнатост:

(285) $$E = e/4\pi\varepsilon r^2,$$

където с e бележим електричната маса на протона или електрона, с ε - диелектричната проницаемост на електричното поле във вакуум, а с r - разстоянието между тях по равенството (282).

**Аксиома АК19.** Движението на протона и електрона в пространството се извършва при променлива маса m и постоянен импулс mv.

**Аксиома АК20.** Вероятните пространствени траектории на протона и електрона се определят по споменатите в аксиомата АК13 уравнения на Шрьодингер, в които импулсите им $p_p$ и $p_e$ са отрицателните комплексни числа:

(286) $(-ih/2\pi)Dr_1 = p_p$ и

(287) $(-ih/2\pi)Dr_2 = p_e$,

където с D бележим оператора:

(288) $d/dx + d/dy + d/dz = D$

със свойството:

(289) $D^2 = d/dx^2 + d/dy^2 + d/dz^2$,

а с $r_1$ и $r_2$ - радиус-векторите на протона и електрона:

(290) $r_1 = r_1(x, y, z)$ и $r_2 = r_2(x, y, z)$

**Определение О22.** Енергията, която се определя от точно изминатия път (траектория) на протона и електрона в пространството, наричаме кинетична, а енергията, зависеща от разстоянието между тях - потенциална.

**Лема ЛК1.** Протонът и електронът в атома на водорода създават електрични кулонови полета с потенциална енергия:

(291) $P = - e^2/4\pi\varepsilon r$

Доказателство: Според аксиомата АП9 положителната (вж. аксиомата АК3) електрична маса на протона притегля отрицателната (вж. аксиомата АК1) на електрона със силата (вж. равенството (227) в аксиомата АП10):

(292) $F+ = eE_{+}$,

където с E бележим напрегнатостта на полето на протона, а с e - електричната маса на електрона. Обратно, отрицателната електрична маса на електрона ще привлича протона със силата:

(293) $F_{-} = eE_{-}$,

където с E бележим напрегнатостта на полето на електрона, а с e - електричната маса на протона.

Щом електричната маса поражда енергийно поле, равните според

аксиомата АК4 електрични маси ще пораждат равни по напрегнатост електрични полета. Следователно,

(294) $E_{+} + E_{-} = 0$ and $F_{+} + F_{-} = 0$,

т. е., системата “протон-електрон” е в кинематично (вж. определението О13) равновесие. Ядрото и електронът вероятно се движат под влиянието на собствените им електрични полета, но резултантата им сила остава нула почти винаги, с изключение на изброимо (дискретно) число от моменти. И, за да изчисляваме почти винаги енергийния запас на системата “протон-електрон”, нека допуснем потенциалната възможност за пораждане на движение, променящо разстоянието r между тях. Това значи, че потенциалната енергия P на системата “протон-електрон” ще бъде пропорционална на максимално вероятното разстояние, което електронът би изминал приближавайки се до ядрото. Тази енергия ще представмлява скаларното произведение:

(295) $P = \langle v_E, F_{-} \rangle$,

където с vE  бележим потециалната скорост на електрона към ядрото. Тя ще бъде равна на производната:

(296) $v_E = dr/dt$

От своя страна според равенствата (293) и (294) потенциалната сила $F_-$ ще бъде равна на:

(297) $F_- = e^2/4\pi\varepsilon r^2$

Ако съгласно равенството (295), имайки предвид истините (296) и (297), извършим скаларното умножение:

(298) $$\langle vE, F- \rangle = \int_o^t (dr/dt)\cdot(e^2/4\pi\varepsilon r^2)dt = \int_o^t ( e^2/4\pi\varepsilon r^2)dr$$

ще постигнем точно резултата (291).

С това лемата е доказана.

**Лема ЛК3.** Кинетичната енергия $Q_p$ на протона и $Q_e$ на електрона се изчисляват по равенствата:

(299) $Q_p = (-h^2/8\pi^2 m_p)\cdot D^2 r_1$ и

(300) $Q_e = (-h^2/8\pi^2 m_e)\cdot D^2 r_2$,

където бележим, с $m_p$ и $m_e$ - съответно, масата на протона и електрона в условията на покой.

Доказателство: Според определението О21 под кинетична енергия следва да се разбира мяра за вероятно движение, а според аксиомата АК19 системата “протон-електрон” се характеризира с постоянен във времето импулс. И тъй като според аксиомата АК19 в движение масите m на протона и електрона се променят, а импулсите им p остават постоянни, следва да елиминираме понятието инерционна маса и да го заменим с понятието инерционен импулс. За целта правим веригата от еквивалентни енергийни преобразувания:

$$(301)\qquad Q = \langle v, m\,dv/dt\rangle = \langle mv, dv/dt\rangle = \langle p,(1/m)dp/dt\rangle =$$

$$= \int_{o}^{t} (p/m)(dp/dt)dt = \int_{o}^{p} (p/m)dp = p^2/2m$$

И сега, ако в крайния резултат от равенството (301) вместо общите означения за импулс p и маса m внесем означенията $p_p$ на импулса на протона от равенството (286) или $p_e$ - на електрона от равенството (287) и масата $m_p$ при покой на протона или $m_e$ - на електрона, ще постигнем точно кинетичните енергийни равенства (299) или (300).

С това лемата е доказана.

**Аксиома АК21.** Кинетичната Q и потенциалната P енергия описват напълно енергийния баланс на безпреходното състояние на системата "протон - електрон" на водородния атом.

**Доказване на примера (системната инвариантност).** Пълната енергия (шрьодингеровата хамилтониана):

$$(302)\qquad H = Q_P + Q_E + P$$

на системата "протон - неутрон" на водородния атом е инвариантна и принадлежи на пространството E(1).

Доказателство: Съдейки по кинетичноенергийното равенство (301), можем да съставим верижната (съставната) функционална диаграма:

$$(303)\qquad m \xrightarrow{\cdot v} p \xrightarrow{\cdot 1/2} p/2 \xrightarrow{\cdot 1/m} p/2m = Q,$$

от която можем да съставим $\acute{\Omega}_1$-алгебрата:

$$(304)\qquad \acute{\Omega}_1 = \{\cdot v, \cdot 1/2, \cdot 1/m\}$$

такава, че посредством нея характеристичното множество $A:\{v, m\}$ се преобразува в кинетичноенергийното множество Q по диаграмата:

$$(305)\qquad A:\{v, m\} \xrightarrow{\acute{\Omega}_1} Q$$

Ако в равенството (304) и диаграмата (305) вместо общите означения за маса - m, и скорост - v, поставим масата $m_p$ при покой на протона или $m_e$ - на електрона, скоростта $v_p$ на протона или $v_e$ - на електрона, ще постигнем и в случая за протона, и в случая за електрона инвариантна $\acute{\Omega}_1$-алгебра и инвариантно характеристично множество A, защото и в двата случая масата при покой не зависи от скоростта.

Следователно, кинетичната енергия Q е инвариантна по отношение на скоростта на протона и електрона.

Съдейки по потенциалноенергийното равенство (295), можем да съставим диаграмата:

$$(306)\qquad B:\{v_E, F\text{-}\} \xrightarrow{\acute{\Omega}_2} P,\ \acute{\Omega}_2 = <\ ,\ >$$

от която виждаме, че характеристичното множество $B:\{vE, F_-\}$ посредством $\acute{\Omega}$-алгебрата $\acute{\Omega}_2$ се преобразува в потенциално-енергийното множество P. И тук характеристичното множество B и

Ώ-алгебрата $Ώ_2$ са инвариантни, защото според равенствата (285) и (293) съпротивителната сила $F_-$ на електрона не зависи от предполагаемата скорост $v_E$, с която той би се движил преодолявайки разстоянието r между него и ядрото.

Следователно, потенциалната енергия P е инвариантна по отношение на каквато и да е скорост на протона и електрона.

Според аксиомата АК21 в безпреходното си състояние системата "протон - електрон" на водородния атом не притежава други енергийни съставки освен кинетичната и потенциалната. А това значи, че равенството (302) описва пълния енергиен баланс на системата "протон - електрон" на водородния атом, енергията H наистина принадлежи на пространството E(1) и заслужава да се нарича пълна. Тя е инвариантна спрямо скоростта на протона и електрона според диаграмите (303) и (306).

С това примерът е доказан.

С доказването на трите примера се доказа съществуването на инвариантни свойства на материята от мащабите на космоса до мащабите на атома, при двете форми на съществуването й - вещество и поле, по класическа и квантова енергийна мяра. И след като енергията е единна мяра за всички форми на движението на материята, а материята съществува само в движение и е безкрайна, следва да приемем, че не може да съществува инвариантен процес в енергийно небалансирани системи на материалния свят. На разумния инженер не остава нищо друго освен да изучава от безкрайния брой инвариантни природни системи условията за съществуване на всяка от тях, която го интересува, за да синтезира инвариантен производствен процес - идеалът за всеки творец.

Това ще стане напълно ясно от следващия раздел.

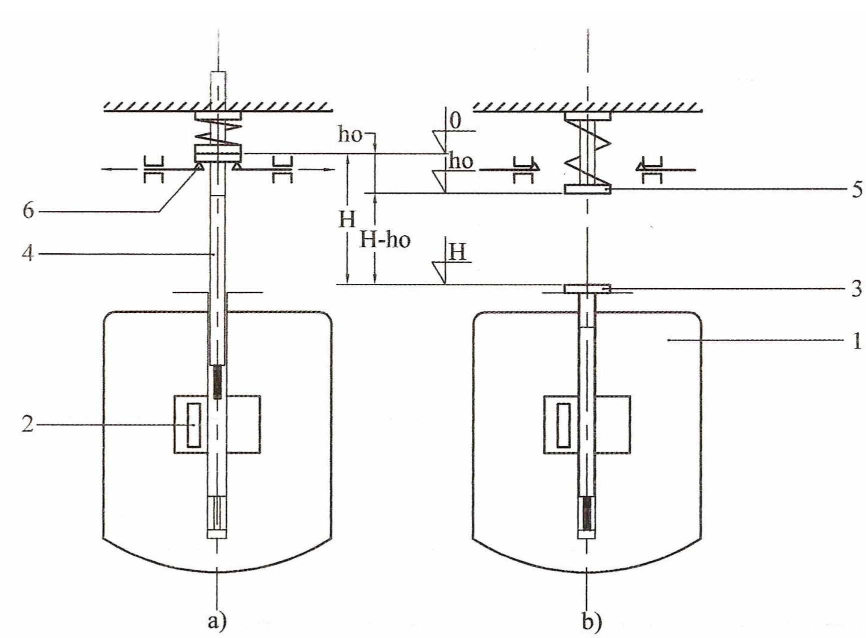
## ИНВАРИАНТНИ СИСТЕМИ В ТЕХНИКАТА

В този раздел от научната разработка се посочват някои

приложения на природните инвариантни системи в техниката. Както вече се спомена и доказа, простосмъртният човек - разбира се и инженерът - няма друг избор освен да се подчинява на всесилната природа и да изучава условията, при които може да съществуват инвариантите на всяка една от безкрайния й брой системи, за да е в състояние да създава нещо полезно за обществото от рода на инвариантните производствени процеси. Разбира се, идеална инвариантност не може да се постигне, но стремежът към съвършенство, както показва хилядолетната човешка история, е природно вграден в човека и обществото щедро го поощрява и великодушно награждава.

“Ако можете да направите капан за мишки по-добър от този на съседа, светът ще направи пътека до къщата Ви”. Тази крилата мъдрост на философа Емерсон би следвало да е истина навсякъде и за всеки. Е, нека се опитаме поне да посочим, кои съседи какви капани са направили по-добре. И да направим това по-добре от съседа.

**Пример П4. (гравитачно защитно реле).** Гравитачната защита на ядрен реактор срещу взрив е инвариантна по бързодействие, двигателна (ударна) сила, мощност и енергия, ако е инвариантна изстрелващата я пружина и лагеруването й има пренебрежимо триене.




Фиг. 9

Доказателство: На фиг. 9 е изобразен ядрен реактор на Е. Ферми с противовзривната си защита, която на образа а) е в изключено, а на образа б) - във включено състояние. Позиционните номера на фигурата отговарят съответно на:

1. Реактора
2. Източника на неутрони
3. Защитния прът
4. Активната част на защитния прът
5. Изстрелващото пръта пружинно устройство
6. Ключалката за задържане на пружинното устройство в състояние на готовност за изстрел.

В състоянието а), когато активната част на защитния прът не закрива източника на неутрони, реакторът работи в номиналния си режим. Неутроните бомбардират ядреното "гориво", ядрата на атомите в "горивото" лавинообразно се делят, отделя се топлинна енергия, която се отдава на топлинен агент (в случая, вода), а водата отива в т. н. парогенератор, който генерира пара за нуждите на паропотребители (турбини, топлообменници и др.).

Делителната ядрена мощност на реактора се регулира в номиналната си стойност с т. н. регулационни пръти, които закриват част от излъчвателната повърхнина на неутронния източник до степен избрана от обслужващия реактора персонал. Тук тези пръти не са изобразени.

В състоянието б), когато активната част на защитния прът закрива изцяло източника на неутрони, реакторът аварийно е спрян. До това състояние се стига, когато регулационните пръти започнат да губят способността си за поддържане на номиналната делителна мощност. Тогава защитнатните дозиметри подават авариен сигнал за дръпване на ключалката "встрани", изстрелващата пружина се освобождава и устройството произвежда изстрел. Изстреляният защитен прът полита надолу, изминавайки пътя от кота 0 до кота ho ускоряван от пружината и земната гравитация и пада свободно в гнездото си, изминавайки пътя от кота ho до кота H ускоряван единствено от Земята.

Пътят на защитния прът от кота 0 до кота H се подчинява на следното характеристично разписание:

(307) СКОРОСТ И СИЛА НА ЗАЩИТНИЯ ПРЪТ

| Кота, интервал, h | Време, t, s | Път, h,m | Скорост, m/s | Сила, f, N |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $G+F_o$ |
| $H \le h < h_o$ | $t \le t < t_o$ | $H \le h < h_o$ | $(C_a+1)gt$ | $G+F$ |
| $h_o$ | $t_o$ | $h_o$ | $(C_a+1)gt_o$ | G |
| $h_o \le h < H$ | $t_o \le t < t$ | $h_o \le h < H$ | $(C_a t_o+t)g$ | G |
| H | $t_H$ | H | $(C_a t_o+t_H)g$ | G |

Нека, следвайки примера П1, да поясним характеристичните величини скорост и сила за разлимните интервали от времето t и пътя h на пръта.

а) h = 0, t = 0.

В този момент прътът е все още неподвижен скоростта му v е нула

и върху него действат едновременно пружинната сила Fo и силата на теглото му G. Ако приемем, че пружинната сила Fo се изменя линейно според дължината на напрягането (изпружването) си, то в този момент тя ще има максималната си стойност cho, където със с бележим т. н. прпужинна констнта, която измерваме в нютони на метър (N/m).

Резултантната сила върху пръта ще бъде:

(308) $f = F_o + G = ch_o + mg,$

където с m бележим масата на пръта, а с g - земното ускорение.

б) $H \le h < h_o$ and $0 \le t < t_o$.

В този интервал прътът вече се движи и под действието на двете сили - на пружината и на теглото - набира скоростта:

(309) $$v = v_g + v_a = gt + c_d \cdot v_g = (1 + c_a)gt,$$

където с $v_g$ бележим гравитационната съставка на скоростта, с $v_a$ - ускорителната пружинна съставка, а с $c_a$ - един поставен от нас нормативен коефициент за ускоряване движението на пръта, с цел той да достигане до кота H с минимално допустимото закъснение $t_H$. С други думи, ако нормираме закъснението на пръта $t_H$, трябва максималната средна скорост $v_H$ на пръта да се подчинява на критерия:

(310) $$v_H \ge H/t_H.$$

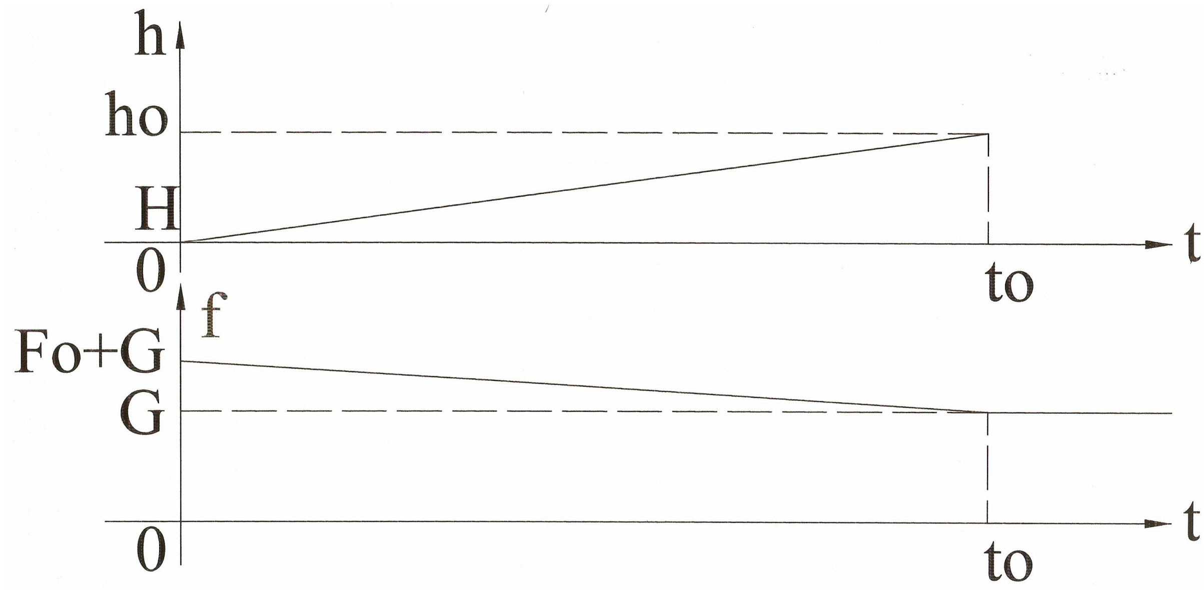
Тогава съобразно равенството (309), замествайки v с $v_H$, трябва:

(311) $$c_a \le (H/gt_H^2) - 1$$

върху пръта продължават да действат едновременно силата на теглото му G и пружинната сила $F_o$, като приемаме, че G остава постоянна през целия път H на пръта, а $F_o$ намалява пропорционално на изпружването h на, преобразувайки се в повременната функция:

(312) $$f = G + ch_o - (ch_o/t_o)t$$

(вж. фиг. 10).




Фиг. 10

в) $h = h_o$, $t = t_o$.

В този момент пружината е напълно изпружена и силата й е нула. Това значи, че върху пръта действа само силата G на теглото му. Скоростта на пръта е достигнала стойността:

(313) $$v = v_o = (1 + c_a)gt_o$$

която наричаме начална скорост на пръта.

г) $h_o \leq h < H$ and $t_o \leq t < t_H$

В този интервал върху пръта действа силата G на теглото му, а скоростта му е сбор от съставките $v_a$ и $v_g$, като ускорителната съставка $v_a$ запазва стойността си за момента to, а гравитационната съставка $v_g$ нараства линейно спрямо времето t, така че:

(314) $$v = v_a + v_g = g(c_a t_o + t)$$

д) $h = H$, $t = t_H$.

В този момент върху пръта действа силата G на теглото му, а гравитационната съставка vg на скоростта му е достигнала максималната си стойност $gt_H$, така че сскоростта на пръта е достигнала стойността:

(315) $v = v_H = g(c_a t_o + t_H)$,

която ще наречем крайна скорост на пръта.

От характеристичното по времето t разписание на пръта (307) нека съставим характеристичното му по параметъра $i\Omega$ (спектрално) разписание за интервалите:

а) $0 \leq t < t \dashrightarrow t_o$.

В този интервал според свойствата на фуриеровото преобразуване скоростта ще има спектъра:

(316) $V(i\Omega) = ((c_a + 1)g\cdot\exp(-i\Omega t)-1)/\Omega^2\cdot\sqrt{2\pi}$

към който прътът ще оказва ускорителна сила със спектъра:

(317) $F(i\Omega) = (((G + F_o)\cdot\exp(-i\Omega t)-1))/-i\Omega\cdot\sqrt{2\pi})\ -$

$- (((F_o/t_o)\cdot\exp(-i\Omega t)-1))\Omega^2\cdot\sqrt{2\pi})$

Според равенството (35) от теоремата Т17 в интервала прътът ще набира началната двигателна енергия:

(318) $E_o(t) = \langle V(i\Omega),F(i\Omega)\rangle$

$= (c_a + 1)g[(t^2/2)\cdot(G + F_o) - F_o t^3/3t_o]$.

б) $t_o \leq t < t \dashrightarrow t_H$.

Този интервал е с ненулево начало и изчислените в него спектри ще имат много сложен вид. За да избегнем немалкото излишни затруднения, които ще породи сложният вид на спектрите, нека приемем момента to за ново начало, от което започваме да наблюдаваме движението на пръта. Ако извършим транслацията и по t, полагайки в равенството (314):

(319) $$t = \tau = T - t_o,$$

което значи, че:

(320) $$\Phi: T = \tau + t_o = t + t_o$$

интервалът б) ще се трансформира по диаграмата:

(321) $$t_o \leq t < t \dashrightarrow t_H \xrightarrow{\Phi^{-1}} 0 \leq T - t_o < T - t_o \dashrightarrow \Phi^{-1}(t_H)$$

в интервала:

в) $0 \leq T - t_o < T - t_o \dashrightarrow \Phi^{-1}(t_H)$.

В този интервал скоростта ще има спектъра:

(316-1) $$V(i\Omega) = ((c_a g t_o \cdot \exp(-i\Omega\tau)-1)/-i\Omega\cdot\sqrt{2\pi}) +$$

$$+ ((g\cdot\exp(-i\Omega\tau)-1)/\Omega^2\cdot\sqrt{2\pi}),$$

към който прътът ще оказва ускорителна сила със спектъра:

(317-1) $$F(i\Omega) = (G\cdot\exp(-i\Omega\tau)-1)/-i\Omega\cdot\sqrt{2\pi}$$

За интервала в) прътът ще придобие енергията:

(318-1) $E(\tau) = G(c_a g t_o \tau + g\tau^2/2)$ или

(319-1) $E(T\text{-}t_o) = G(c_a g t_o(T\text{-}t_o) + g(T\text{-}t_o)^2/2)$,

която в обратно преобразувания интервал б) ще бъде:

(320-1) $E(t) = \Phi^{-1}(E(\tau)) = Gg[c_a t_o(t\text{-}t_o) + (t^2\text{-}t_o^2)/2]$

Пристигайки на кота H, прътът ще удари с долния си край в гнездото си, нанасяйки върху фундамента на реактора деформиращата (двигателната) енергия:

(321-1) $E = E(t_o) + E(t_H) = (c_a + 1)g[(t_o^2/2)\cdot(G + ch_o) -$
$-ch_o t_o^2/3] + Gg[c_a t_o(t_H\text{-}t_o) + (t_H^2\text{-}t_o^2)/2]$

Ако диференцираме по времето t равенството (320-1) и след това заменим в него t първоначално с to, ще получим началната мощност върху пръта $S(t_o)$. А ако след това заменим t с $t_H$, ще имаме налице и крайната деформираща (двигателната) мощност на пръта $S(t_H)$. Цялата мощност упражнена върху фундамента на реактора ще бъде сумата:

(322) $S = S(t_o) + S(t_H) = Gg[(c_a+1)t_o + (c_a t_o + t_H)]$

Еластичността и ударната якост на пръта и фундамента трябва при проектиране да се проверяват по енергията (321-1) и мощността (322), независимо че реакторът се оразмерява да оцелее невредим даже при някакво пряко бомбено попадение. Двата критерия за оразмеряване са независими един спрямо друг.

**Доказателство на инвариантностите:** Нека представим ударната енергия от равенството (321-1) като текуща във времето t енергия:

(323) $E(t) = (318\text{-}1) + (320\text{-}1) =$

$$= (c_a + 1)g[(t^2/2)\cdot(G + ch_o) - ch_o t^3/3t_o] +$$

$$+ Gg[c_a t_o(t-t_o) + (t^2-t_o^2)/2]$$

При условие, че пружинната константа с на изстрелващото устройство е наистина неизменна във времето t, всички букви в дясната страна на равенството (323) освен буквата t, както сочи примера П1, означават константи. Системата за защита на реактора срещу взрив според определението О16 е линейна и, следователно, според теоремата Т54 е инвариантна. Защитният прът на реактора извършва инвариантен преход от кота 0 до кота Н при всяко изчезване на оперативното напрежение към ключалките (вж. фиг. 9) на изстрелващото го устройство.

С това примерът е доказан.

С доказването на примера П4 се доказа, че гравитачният принцип

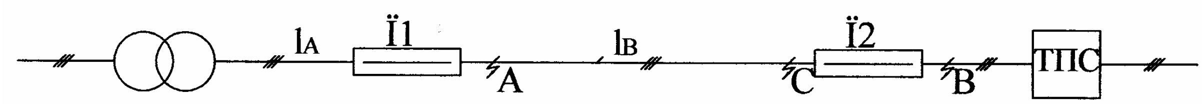
за противовзривна защита на ядрен реактор остава инвариантно

най-сигурният, защото гравитачното поле на Земята не може никога и никъде да се екранира (вж. аксиомата Г5), а пружините от специални за целта стомани имат инвариантна деформираща сила за практически неограничено време.

И при условие, че равностойните по поглъщане на неутрони противовзривни пръти на всеки реактор са не по-малко от три на брой, практически ще е нужна особено квалифицирана и особено добре организирана саботажна група, за да предизвика умишлен ядрен взрив даже на най-стария тип реактор - този на Е. Ферми. Не така стои, обаче, въпросът с реакторите тип “академик Курчатов”, при които прътите се задвижват от серводвигател. Тук злощастието a la Чернобил иска само неограничени от света диктатори на върха на държавната власт. Саботажът може да се извърши и от любители - електротехници.

Пример П5  (инвариантна защита срещу късо съединение). Защитата на електропровод срещу късо съединение, настроена по джауловата топлина в него по време на съединението, е с инвариантна селективност.

Доказателство: На фиг. 11 е изобразен трифазен електропровод  с изолирана неутрала между градска подстанция 110/10 kV и тяговопонизителна подстанция (ТПС) на многострадалната подземна железница (метрото) в София.




Фиг. 11

На фигурата е означено с:

П1 и П2 - изходният защитен прекъсвач в градската подстанция и входният защитен прекъсвач в ТПС, които автоматично изключват енергийния приток при късо съединение в точките А и В;

$l_A$ и $l_B$ - разстоянинието от трансформаторната страна 10 кV на градската падстанция до точките А и В - вероятни места на къси съединения;

А, В и С - вероятните места на къси съединения по електропровода.

**Определение О23.** Късо съединение по електропровода е всяка трайна галванична връзка между проводниците му от подстанцията до ТПС, която спира след себе си преноса на електроенергия.

Електропроводът и прикрепените към него системи са подчинени на следните:

**Аксиома А31:** Потребяваният от влаковете товарен ток io променя ефективната си стойност Io във времето t по равенството:

(324) $$I_o(t) = U/\sqrt{3}\cdot(Z_o + Z_G(t)),$$

където U е напрежението на електропровода (в случая - 10 кV), $Z_G$ - импедансът на тяговата електрична верига на страна 10 кV в ТПС, Zo

- импедансът на електропровода (вж. закона на Ом - равенството (248)).

Аксиома А32: Токът по електропровода $i_{1B}$ след установяване на късото съединение в точката В променя ефективната си стойност $I_{1B}$ във времето t по равенството:

$$I_{1B}(t) = U/\sqrt{3}\cdot Z, \tag{325}$$

където Z е импедансът:

$$\lim_{t\to\infty} (Z_o + Z_G(t)) \to Z_o, \tag{326}$$

т. е., импедансът на линията след късото съединение, което е предизвикало т. н. шунтиране на тяговия импеданс.

**Аксиома А33:** През точкаите А и С от схемата (преди и след прекъсвача П2) текат еднакви, описани в аксиомите А31 и А32, токове.

**Аксиома А34:** Преобразуваната по време на късото съединенние в точката В енергия в топлина (вж. равенството (247) в лемата ЛП15):

$$Wk = \int_o^{t_k} I_{1B}(t)^2 R_o dt = \int_o^{t_k} [(U/\sqrt{3})^2/R_o]dt, \tag{327}$$

където с $t_k$ бележим момента спрямо началото на късото съединение (t = 0), в който прекъсвачът П2 изключва линията, променя пренебрежимо активното й съпротивление $R_o$.

**Аксиома А35:** Индуктивността $L_o$ на електропровода и съпротивлението му $R_o$ са линейно разпределени по цялата му дължина.

**Аксиома А36:** Селективно защитаване на електропровода означава предпазване на проводниците му от повреди под влиянието на джауловата топлина (327) така, че при късо съединение в точката В, прекъсвачът П2 ще изключи притока на енергия от градската подстанция към ТПС преди прекъсвачът П1 да стори същото.

**Аксиома А37:** Прекъсвачите П1 и П2 не отказват едновременно при едно и също късо съединение.

**Аксиома А38:** Апаратите, от които е съставена защитната система на елктропровода, са гарантирано инвариантни.

**Лема Л31:** В интервала:

(328) $0 < t \leq t_k$

е в сила закономерността:

(329) $dI_o(t)/dt < dI_{1B}(t)/dt, t\text{-->}0.$

Доказателство: По определение производните в равенството (329) представляват границите:

(330) $\lim_{t_k \text{-->} 0}\{[I_o(t_k) - I_o(0)]/(t_k - 0)\} = dI_o(t)/dt$

(331) $\lim_{t_k \text{-->} 0}\{[I_{1B}(t_k) - I_{1B}(0)]/(t_k - 0)\} = dI_{1B}(t)/dt$

Сравнявайки токовете от равенствата (324) и (325), стигаме до

естествения извод, че токът на късото съединение I1B е по-голям от тяговия ток Io, защото импедансът Z след късото съединение в знаменателя на равенството (326) е по-малък от тяговия импеданс Zo +ZG(t) в знаменателя на равенството (324). От друга страна в началото на късото съединение, т. е. при t = 0, между тяговия ток Io и токът на късото съединение I1B поради еднозначността и непрекъснатостта на тока като функция на времето t (вж. теоремата Т2) съществува равенството:

(332) $$I_{1B}(0) = I_o(0).$$

Следователно, числителят в дробта (331) е по-голям от числителя в дробта (330) и, предвид еднаквите знаменатели на същите дроби, твърдението (329) е истинно.

С това лемата е доказана.

**Лема Л32:** В интервала от време (0, $t_к$) топлинната енергия $W_{kA}$ при късо съединение в точката A е по-голяма от топлинната енергия $W_{kB}$ при късо съединение в точката B.

Доказателство: Според определението О23 късото съединение спира преноса на електроенергия след точката, в която е настъпило.

Следователно, цялата генерирана от подстанцията енергия след късото съединение започва да се потребява от частта на електропровода, чиято дължина се ограничава между подстанцията и точката на съединението. В такъв случай за пълната енергия ЕкА при късо съединение в точката А и пълната енергия ЕкВ при късо съединение в точката В са в сила равенствата:

(333) $$E_{кA} = \int_o^{t_k} (U/\sqrt{3})\cdot I_{1A}\cdot dt \text{ и}$$

(334) $$E_{кB} = \int_o^{t_k} (U/\sqrt{3})\cdot I_{1B}\cdot dt$$

където с $I_{1A}$ и $I_{1B}$ бележим тока на късото съединение в точките A и B.

От друга страна, ако си представим, че по време на късо съединение в точката В започне късо съединение в точката А, то по логиката на равенството (326) за импеданса $Z_A$ на електропровода до точката А е в сила закономерността:

(335) $$\lim_{t \to \infty} (Z_A + Z_{AB}(t)) \to Z_A,$$

където със $Z_{AB}$ бележим импеданса на електропровода между точките А и В. От равенството (326) и аксиомата А35 става тривиално ясно, че:

(336) $$(Z_A + Z_{AB}) > Z_A$$

и по закона на Ом между токовете на късите съединения $I_{1A}$ и $I_{1B}$ съществува зависимостта:

(337) $$I_{1A} = U/\sqrt{3}\cdot Z_A > U/\sqrt{3}\cdot(Z_A + Z_{AB}) = I_{1B}$$

Ако заместим стойностите на I1A и I1B от неравенството (337) съответно в равенствата (333) и (334), те ще добият вида:

(338) $$E_{кA} = \int_{o}^{t_k} (U/\sqrt{3})^2/Z_A\cdot dt \text{ и}$$

(339) $$E_{кB} = \int_{o}^{t_k} (U/\sqrt{3})^2/(Z_A+Z_{AB})\cdot dt$$

Подинтегралните функции на равенствата (338) и (339) са дроби с еднакви числители, а знаменателят в равенството (339) според прехода (335) е по-голям от знаменателя в равенството (338). Това значи, че:

(340) $E_{кA} > E_{кB}$.

И ако определим активната (вж. теоремата T19) енергия на късите съединения, която се преобразува в джаулова топлина, то:

(341) $W_{кA} = E_{кA} \cdot \cos\varphi > E_{кB} \cdot \cos\varphi = W_{кB}$,

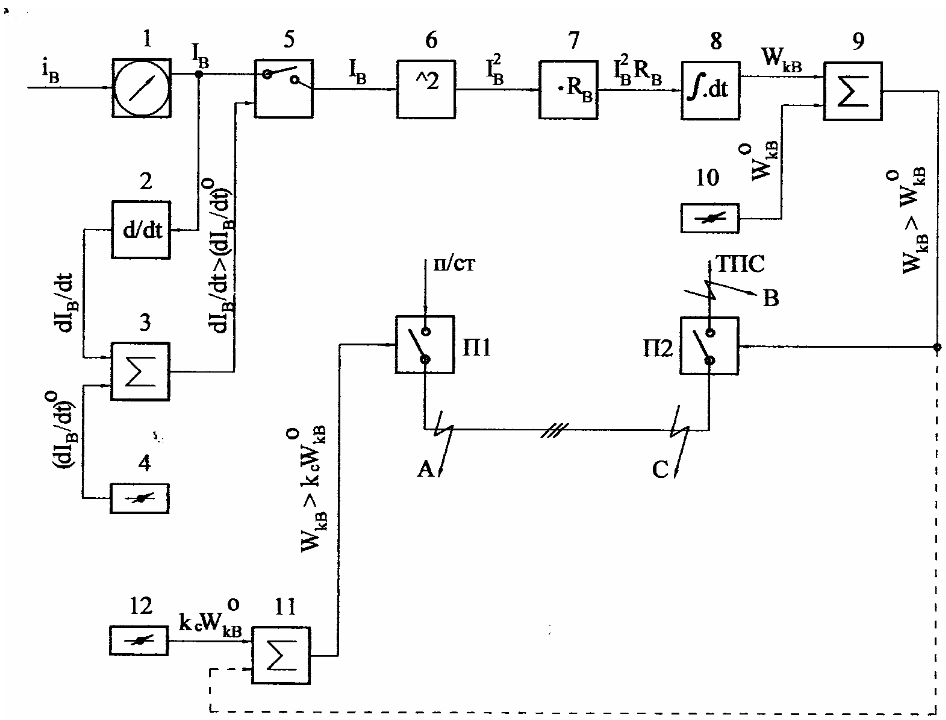
където:

(342) $\cos\varphi = R_A/Z_R = (R_A+R_{AB})/(Z_R+Z_{AB}) = R_o/Z_o$

е отношението на активното съпротивление на електропровода в участъците "подстанция - точка A" и "точка A - точка B" към импеданса му в същите участъци. Като следствие от аксиомата A35 това отношение е постоянно. Ако го заместим съответно в равенствата (338) и (339), те ще добият подобието на равенството (327) към аксиомата A34.

С това лемата е доказана.

**Доказване на инвариантността:** Фиг. 12 представлява схема на защитната система на електропровода срещу късо съединение в точката B.




Фиг. 12

Защитните действия на системата образуват последователността:

- токът $i_B$ през точката B се измерва от килоамперметъра - 1, който определя ефективната му стойност $I_B$;
- измерената ефективна стойност $I_B$ се предава едновременно на диференциатора - 2 и на релето - 5;
- диференциаторът - 2 диференцира $I_B$ по времето t, производната $dI_B/dt$ се предава на алгебричния суматор - 3. Там тя се сравнява с предварително избраната (настроената) от избирача - 4 производна $(dI_B/dt)^o$;
- според лемата ЛЗ1 стойността на $(dI_B/dt)^o$ е избрана по-голяма от стойността на производната $dI_o/dt$ на ефективната стойност $I_o$ на тяговия ток $i_o$. Ако се окаже, че:

$$(343)\qquad dI_B/dt > (dI_B/dt)^o,$$

е налице късо съединение и релето - 5 щя включи линията, за да предадде стойността на $I_B$ за по-нататъшно обработване;

- $I_B$ се повдига на квадрат от квадратора - 6 и повдигнатата на квадрат стойност $I_B^2$ се умножава по коефициента $R_B$ от умножителя - 7. Коефициентът $R_B$ е пропорционален на активното съпротивление $R_A + R_{AB}$ на електропровода от подстанцията до точката B. Изходният сигнал $I_B^2R_B$ след умножителя - 7 при това условие ще е пропорционален на топлинната мощност, нагряваща електропровода при късо съединение в точката B (вж. равенството (327);
- сигналът $I_B^2R_B$ се интегрира по времето t от интегратора - 8, на чийто изход според равенството (327) се явява сигнал пропорционален на енергията $W_{кB}$, нагряваща електропровода при късо съединение в точката B;
- сигналът $W_{кB}$ се сравнява в суматора - 9 с предварително избраната с избирача - 10 стойност $W_{кB}^o$, която е пропорционално по-малка от допустимата енергия, нагряваща електропровода така, че да е действително спазено условието на аксиомата A34. Когато се окаже, че:

(344) $$W_{кB} > W_{кB}^o;$$

изходящият от суматора - 9 сигнал $W_{кB}$ заповядва на прекъсвача П2 да изключи енергийния приток през точката B към ТПС. Ако това се изпълни, елктропроводът ще бъде изключен от подстанцията и изгарянето му - предотвратено;
- ако прекъсвачът П2 откаже изключването, предаденият (предпочитателно, по оптичен път) и до суматора - 11 сигнал $W_{кB}$ ще се сравни с предварително избрания от избирача - 12 сигнал кс$W_{кB}^o$. Тук въпреки, че е избрано:

(345) $к_с > 1$,

сигналът $к_с W_{кB}^{o}$ също както $W_{кB}^{o}$ е пропорционално по-малък от допустимата енергия, нагряваща електропровода така, че да е действително спазено условието на аксиомата А34. Когато се окаже, че:

(346) $W_{кB} > к_с W_{кB}^{o}$

изходящият от суматора - 11 сигнал $W_{кB}$ заповядва на прекъсвача П1 да изключи енергийния приток през точката В към ТПС далече преди енергията $W_{кB}$ да се е приближила по големина до енергията $W_{кA}$ (вж. лемата Л32). Съгласно аксиомата А37 прекъсвачът П1 изпълнява заповедта. Електропроводът е изключен от енергийната система и защитен от пожар, взрив и пр. непредвидими даже за системата последици.

**Лема Л33:** Защитната система е селективна.

Доказателство: Според лемата Л32 енергията $W_{кA}$ при късо съединение в точката А нагрява най-много елктропровода за времето на съедиенито $t_k$. Това значи, че електропроводът трябва да се построи от проводници, издържащи със сигурност достатъчно по-големи топлинни претоварвания. Приемаме, че това е така. При това условие прекъсвачът П1 се настройва за изключване при избрана енергия:

(347) $W_{кA}^{o} > W_{кB}^{o}$.

При тази настройка, ако настъпи късо съединение в точката В, енергията $W_{кB}$ ще предизвика изключване на прекъсвача П2, когато надмине големината на $(W_{кB})^o$. При това електропроводът ще се нагрее, поглъщайки енергията $(W_{кB})^o$ по закономерността:

$$(348)\quad W_{кB}{}^o = \int_o^t I_{1B}(t)^2(R_A+R_{AB})dt > \int_o^t I_{1B}(t)^2R_A dt < W_{кA}{}^o$$

където с $t_{kB}$ бележим момента на изключването на прекъсвача П2. С други думи, за времето $t_{kB}$ електропроводът няма да погълне енергия, която да нагрее участъка до точката А както при късо съединение в тази точка.

Ако прекъсвачът П2 откаже изключването и информационната линия до суматора - 11 не съществува, нагряването на електропровода ще продължи, докато той погълне енергията $(W_{кA})^o$ по закономерността:

$$(349)\qquad W_{кA}{}^o = \int_o^t I_{1B}(t)^2R_A dt > \int_o^t I_{1B}(t)^2R_A dt$$

където с $t_{kA}$ бележим момента на изключването на прекъсвача П1. Същият ефект ще настъпи и ако се появи късо съединение в точката С, т. е., вън от ТПС (вж. аксиомата А33).

Подинтегралните функции в неравенството (349) са еднакви. От това следва, че:

$$(350)\qquad t_{kA} > t_{kB}$$

или с други думи, прекъсвачът П1 ще закъснява спрямо П2. Според аксиомата А36 това значи, че системата ще бъде защитавана селективно.

С това лемата е доказана.

**Лема Л34 (Доказване на инвариантността):** Селективността на защитната система е инвариантна.

Доказателство: Според лемата Л33 селективността на защитната система се постига чрез настройването на всеки прекъсвач да изключва енергийния приток към ТПС по сигнал пропорционален на джауловата топлинна поглъщана от електропровода при късо съединение на място непосредствено след него. Ако в общия случай отбележим това място като точката X, то следвайки подобието на неравенството (348), трябва да настроим прекъсвача пред точката X да изключва енергийния приток към ТПС пропорционално над енергията:

$$(351) \qquad W_{кX}{}^{o} = \int_{o}^{t_{kX}} I_{1X}(t)^2 r l_X dt,$$

където с $I_{1X}$ бележим ефективната стойност на тока $i_{1X}$ при късо съединение в точката X, с $t_{kX}$ - момента на изключването на прекъсвача, с r - линейното съпротивление на електропровода измервано в к/m, с $l_X$ - дължината на електропровода от подстанцията до точката X.

Следвайки подобието на диаграмата (275) от лемата ЛП20, стигаме до извода, че съществува α-алгебра, чрез която се извършва преобразуването на характеристичното множество w в енергийното множество $(W_{кX})^{o}$ по диаграмата:

$$(352) \qquad w:\{I_{1X}, rl_X\} \xrightarrow{\alpha} W_{кX}{}^{o}, \ \alpha = < , >$$

Според аксиомата А34 съпротивлението $r_{lX}$ не зависи от тока $I_{1X}$. Следователно характеристичното множество w е инвариантно. Инвариантна е и α-алгебрата. И при гаранции за инвариантност на апаратите от защитната система (вж. аксиомата (А38)), селективността на защитните действия също е инвариантна.

С това лемата и примерът са доказани.

Системата на фиг. 12 все още не съществува и селективността на защитите на електропроводи, пренасящи енергия под средно и високо напрежение, е нелесен проблем не само у нас. Но авторът на тези редове е оптимистично настроен, що се отнася до развитието на компютърната техника и приложенията ѝ за автоматично управление, едно от които е апаратурата на споменатата система.

При поява на пазара на защитни устройства, почиващи на принципа в примера П5, в качеството си на проектант авторът не би се поколебал да приложи подобен вид устройства за защита на енергосистемата на Софийското метро. Проблемът за защитаването на тази система със сигурна безотказност, без реагиране на фалшиви сигнали и при наличие на възможност за бързо откриване на мястото на късото съединение, е особено важен, когато става въпрос за пътуващи под земята хора.

**Пример П6 (инвариантност на лазерен лъч):** Лазерният лъч е инвариантен по сила и честота при постоянна инверсия на населеностите и постоянни загуби на усилването в квантовата му система.

Доказателство: Нека се опрем на следната аксиоматика:

**Определение О24:** Квантова частица е всяка материална точка, която се движи по законите на квантовата механика, в това число и по аксиомите АК7,...,АК14, уподобявайки движението на електроните в полето на атома.

**Аксиома АК22:** Състоянието, при което квантовата частица притежава минималната си кинетична енергия Qo (вж. равенството (283)), е първично (основно) инвариантно състояния, а всички останали състояния, при които:

(353) $$Q_o < Q_1 < Q_2 < ,...,< Q_n$$

са вторични (мета-) инвариантни състояния.

Аксиома АК23: Метаинвариантните състояния се постигат чрез външен енергиен приток към частицата, поради което това състояние се нарича възбудено.

**Определение О25:** Количеството $N_n$ квантови частици в единица обем, всяка от които притежава кинетичната енергия (стои на енергийното ниво) $Q_n$, наричаме населеност на нивото $N_n$.

**Определение О26:** Ако в някой обем квантовите частици образуват населеностите $N_m$ и $N_n$ и:

(354) $$N_n > N_m,$$

казваме, че средата в този обем е активна, а разликата:

(355) $$N_n - N_m > 0,$$

наричаме инверсия на населеностите.

**Определение О27:** Система от квантови частици (квантова система) наричаме всяко множество от населености.

**Аксиома АК24 (Постулат на Айнщайн):** За всяка квантова система с населености $N_n$ и $N_m$ съществуват вероятностите А - за свободно (спонтанно) и В(qУ) - за принудено от външен източник преминаване от сътоянието $Q_n$ в състоянието $Q_m$, при което се излъчва енергия във вид на светлина.

С буквата qУ бележим преходната енергийна плътност (J/m3) на системата.

**Аксиома АК25 (Закон на Болцман):** При термодинамично равновесие населеностите $N_m$ и $N_n$ в квантова система се намират в съотношението:

(356) $$N_m/N_n = \exp((Q_n - Q_m)/k_BT) = \exp(h\Omega_{nm}/2\pi k_BT),$$

където с $k_B$ $(J/^oK)$ бележим т. н. константа на Болцман, а с $T$ $(^oK)$ - абсолютната температура на населената с квантови частици среда. При това:

$$(357) \qquad N_n < N_m$$

**Аксиома АК26.** Съществува поне една точка, чиято вътрешна енергия (J) изцяло се преобразува в синусуидна (монохроматична) светлина.

**Аксиома АК27.** Вътрешната мощност S (W) на точката образува светлинния поток Ф, който се измерва в лумени (lm), по равенсттвото:

$$(358) \qquad \Phi = c_f S,$$

където $c_f$ (lm/W) е преобразувателен коефициент, характеризиращ светлинния източник (в случая - точката).

**Аксиома АК28.** Потокът Ф осветява единица площ от вътрешната повърхнина на описана около точката сфера с радиус r (m) със сила I $(lm/m^2)$.

**Аксиома АК29 (диференчен закон на Бугер-Ламберт).** Светлинната сила Io, която е налице на разстояние ro от точката, намалява с разликата Io - I > 0 на разстояние r спрямо точката по равенството:

$$(359) \qquad -(I - I_o) = \alpha I(r - r_o),\ r > r_o$$

където с α бележим т. н. коефициент на светлинно поглъщане (lm/m) на средата около точката.

**Лема ЛК2 (интегрален закон на Бугер - Ламберт).** Светлинната сила I на разстояние r от точката се определя по равенството:

$$(360) \qquad I = I_o \cdot \exp[-\alpha(r - r_o)]$$

Доказателство: Ако в равеенството (359) извършим след преобразуване граничния преход:

$$(361) \qquad \lim_{I \to I_o}[-(I - I_o)/I] = \alpha \cdot \lim_{r \to r_o}(r - r_o),$$

след още едно преобразуване ще бъде налице линейното хомогенно диференциално уравнение:

$$(362) \qquad dI/dr + aI = 0$$

Ако интегрираме уравнението (362), приемайки началното условие от аксиомата АК29, че:

$$(363) \qquad I(r_o) = I_o,$$

ще постигнем точно резултата (360).

С това лемата е доказана.

**Лема ЛК3.** Кинетичната енергийна плътност q ($lm \cdot s/m^3$) при преход (светлинно излъчване или поглъщане) на квантова система с населеност N се определя по равенството:

$$(364) \qquad q = Nh\Omega/2\pi$$

Доказателство: То е очевиден резултат от понятието квантова система (вж. определението О27) и третия постулат на Бор (вж. равенството (283)).

Измерването на енергийната плътност в $lm \cdot s/m^3$, от своя страна е резултат от аксиомата АК27.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛК4.** Квантова система с преобладаваща възможност (вероятност) за принудено светлинно излъчване и пренебрежима възможност за спонтанно светлинно излъчване може да се управлява инвариантно по честотата Ω на излъчваната светлина. В обратния случай при система с преобладаваща възможност (вероятност) за спонтанно светлинно излъчване и пренебрежима възможност за принудено светлинно излъчване - това е невъзможно.

Доказателство: Според постулата на Айнщайн (вж. аксиомата АК24) принуденото излъчване зависи от енергийната плътност на системата. Това значи, че равенството (364) е валидно за него.

Равенството (364) е дискретно линейно, ако допуснем, че населеността N на системата е постоянна. Това значи, че ако N са

частиците, губещи част от енергийната плътност q, то тази плътност зависи дискретно линейно от честотата Ω на излъчената светлина.

С други думи, равенства от вида (364) принадлежат на някакво дискретно линейно енергийно пространство. То е едномерно и можем да го означим ε(1). Това дискретно пространство всъщност представлява точка от пространството E(1) от класическата теория на инвариантността. С други думи, система управлявана по функционалната зависимост (364) ще бъде инвариантна (вж. теоремата Т45) за някои дискретни стойности на честотата Ω.

От друга страна, пак според аксиомата АК24 вероятността за спонтанно светлинно излъчване не зависи от енергийната плътност на системата и, следователно, инвариантно управление на спонтанното излъчване е невъзможно.

С това лемата е доказана.

**Аксиома АК30.** Квантови системи със спонтанно излъчване не представляват технически интерес поради доказаната в лемата ЛК4 невъзможност за инвариантно управление по честотата Ω на излъчената светлина. Поради това по-долу в текста под излъчване се разбира само принудено.

**Лема ЛК5.** Плътността на светлинната мощност $dq/dt$ ($lm/m^3$) при преход (излъчване или поглъщане) на квантова система се определя по равенството:

(365) $$dq/dt = (dN/dt)\cdot h\Omega/2\pi.$$

Доказателство: То е очевиден резултат от диференцирането по времето t на равенството (364)

**Лема ЛК6.** Плътността на светлинната мощност $dq/dt$ при преход (излъчване или поглъщане) на квантова система е числено равна на градиента $dI/dr$ на светлинната сила I на системата по посока на радиус - вектора r в пространството и се определя по равенството:

(366) $$dq/dt = dI/dr = (dN/dt)\cdot h\Omega/2\pi.$$

Доказателство: Според аксиомата АК28 светлинната сила I се измерва в $lm/m^2$, което значи, че градиентът $dI/dr$ от равенството (366) ще се измерва в $lm/m^3$ и ще има качеството на плътност на светлинна мощност.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛК7.** Плътността на светлинната мощност $dq/dt$ при преход

(излъчване или поглъщане) на квантова система се определя и по равенството:

(367) $$dq/dt = \sigma(\Omega)NI,$$

където със $\sigma(\Omega)$ бележим т. н. ефективно преходно сечение ($m^2$), което е напречно за всеки светлинен лъч и характеризира квантовата система.

Доказателство: Дясната страна на равенството (367) представлява физична величина измервана в $lm/m^3$ и, следователно, има качеството на плътност на светлинна мощност.

С това лемата е доказана.

**Лема ЛК8.** Равновесието на плътността на светлинната мощност $P_a$

при поглъщане спрямо плътността на светлинната мощност $P_e$ при излъчване в квантова система с населености $N_m$ и $N_n$ се определя по равенството:

$$(368) \qquad \sigma_{mn}(\Omega_{mn})N_mI + \sigma_{nm}(\Omega_{nm})N_nI = 0,$$

където със $\sigma_{mn}$ бележим ефективното преходно сечение на системата при поглъщане, а със $\sigma_{nm}$ - при излъчване.

Доказателство: Двете събираеми в равенството (368) според лемата ЛК7 имат качеството на плътности на светлинна мощност, при това първото - при преход на населеността $N_m$ към $N_n$ (съпроводено с поглъщане), а второто - обратно, от $N_n$ към $N_m$ (съпроводено с излъчване). Следователно, можем да ги отбележим съответно с $P_a$ и $P_e$. Като се има предвид, че честотата на поглъщането kmn според третия постулат на Бор е равна по модул и обратна по знак на честотата knm на излъчването, следва, че:

$$(369) \qquad P_a + P_e = 0.$$

С това лемата е доказана.

**Определение О28.** Квантова система, при която:

$$(370) \qquad \sigma_{mn} = \sigma_{nm} = \sigma$$

наричаме неизродена и обратно, при:

(371) $\sigma_{mn} \neq \sigma_{nm}$

наричаме системата изродена.

**Аксиома АК31.** Приема се, че разглежданата по-долу система по смисъла на определението О28 е неизродена.

**Лема ЛК9.** Принудено излъчване на светлинна енергия е възможно само тогава, когато квантовата система е активна (вж. определението О28).

Доказателство: Предвид аксиомата АК31 равенството (368), определящо плътността на мощностния баланс “излъчване - поглъщане” в квантова система, ще добие вида:

(372) $\sigma(\Omega)[N_m - N_n]\cdot I = 0$

Ако в равенството (372) диференцираме светлинната сила I по радиус - вектора r, т. е., определим градиента dI/dr на светлинната сила I в посока r от пространството, ще излезне, че:

(373) $\sigma(\Omega)[N_m - N_n]\cdot dI/dr = 0$

Интегрирането на линейното диференциално уравнение (373), приемайки началното условие:

(374) $I(0) = I_o$

ще доведе до резултата:

(375) $I = I_o\cdot\exp(-\sigma(\Omega)(N_m - N_n)r)$

Сравнявайки равенствата (375) и (360), излиза, че според интегралния закон на Бугер - Ламберт величината:

(376) $\alpha = \sigma(\Omega)(N_m - N_n)$

представлява коефициент на експоненциално усилване на светлинния лъч $I_o$ по посоката r, когато:

(377) $N_n > N_m$,

т. е., когато системата е активна и коефициент на експоненциално отслабване (затихване) на същия лъч, когато

(378) $N_n < N_m$,

т. е., когато системата не е активна.

С други думи, когато системата е активна, насочен към нея светлинен лъч я принуждава отново да го излъчи, увеличавайки силата му I експоненциално по посоката r и обратно - когато системата не е активна, същият лъч се поглъща от нея експоненциално по същата посока.

С това лемата е доказана.

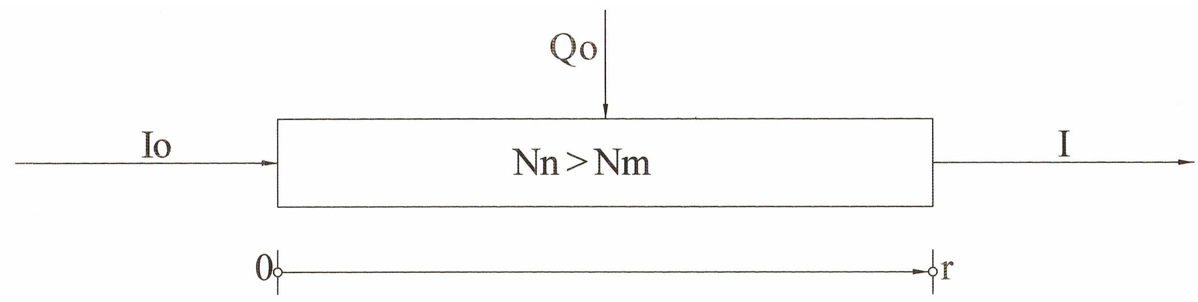
**Определение O29.** Устройство, съдържащо в себе си квантова система, която усилва светлинен лъч по интегралния закон на Бугер - Ламберт при спазване на условията (376) и (377), се нарича светлинен усилвател с принудено предаване на излъчването. На английски език - Light Amplifier by Stimulated Emission of Radiation (LASER).

**Аксиома АК32.** Коефициентът на усилване α на квантовата система на лазер намалява адитивно с величината β, поради наличието на загуби на светлинна сила причинени от релаксация (естествено възвръщане на топлинното равновесие по равенството (356)), насищане и др. Поради това равенството (375) придобива реалния вид:

(379) $I = I_o \cdot \exp((\alpha - \beta)r)$.

**Аксиома АК33.** Приема се, че коефициентът $\beta$ на загубите в усилването на лазера е постоянна.

**Доказване на инвариантността:** Фиг. 13 представлява затворения обем на квантовата система на лазер.




Фиг. 13

Обемът има постоянно сечение по цялата си дължина r и е запълнен с вещество, съставено от частици с енергийните нива $Q_m$ и $Q_n$, образуващи населеностите $N_m$ и $N_n$. Инверсията $N_m < N_n$ в обема се поддържа постоянна от възбудителния енергиен приток $Q_o$ към него, при което входният светлинен лъч $I_o$, който има честота $\Omega$ напуска обема достигайки стойността I по равенството (379) със същата честота. При тези условия квантовата система е инвариантна.

Доказателство: Ако в равенствата (364) и (365) формално заместим населеността N с разликата от населености $N_m$ - $N_n$, в тях няма да настъпи качествена промяна, а просто ще бъде налице уточненият им вид:

(380) $q = (N_m - N_n) \cdot h\Omega/2\pi$ и

(381) $dq/dt = (h\Omega/2\pi) \cdot d(N_m - N_n)/dt = dI/dr$

Следователно, можем да стигнем до извода, че равенството (379) е резултат от диаграмата:

d/dt ≡ int(r)

(382) (380)--->(381)--->(366)------>(379),

където с int(r) бележим интегрирането на диференциалното уравнение (381), имайки предвид идентичността му с равенството (366).

Параметрите на равенствата, образуващи диаграмата (382) при спазване на началните условия на примера и съгласно аксиомите и лемите в него са величини инвариантни спрямо силата I и честотата на лазерния лъч к. Инвариантна срямо тях е и алгебрата:

(383) d/dt ∘ ≡ ∘ int(r)

С това примерът е доказан.

С доказването на примерите П4, П5 и П6 се доказа съществуването на възможности за създаване на съоръжения, работещи в инвариантен режим, по законите на класическата и квантовата механика. За всеки вид съоръжение се посочиха гранични условия, при чието спазване е възможно техническите ххарактеристики на съоръжението да бъдат инвариантни.

Е, тогава щом има гранични условия за съществуване на инвариатността, значи има и точни граници, спрямо които тя не съществува. По какви критерии да определяме тези граници? Това ще се посочи в следващия раздел.

## ГРАНИЦИ НА ИНВАРИАНТНОСТТА

Този раздел от научната разработка представлява завършек на теорията на инвариантността. В него се посочват критериите, според които тя достига до границите на съществуването си, както и начините за постигане на недопустимост за преминаване на тези граници.

Вече (вж. началния текст в раздела “Енергийна алгебра. Първа част”) бе посочено, че по научни прогнози даже Слънцето след милиарди години ще угасне. Това безусловно ни насочва към тъжната мисъл, че вечното за нас благославяно и проклиняно слънчево светене е с ограничена вечност в пространството и времето на вселенския безкрай. А това значи, че инвариантите на вселенския безкрай имат някакви граници. И щом те - природните инварианти имат граници, следва и приложенията им в техниката да бъдат съобразявани с тях.

Нека прекрачим все още невидимите за нас граници на инвариантността и се озовем вън от нея.

**Теорема Т55.** Система, чийто импедансни коефициенти $\mu$, $\sigma_m$ и $\sigma_l$ се променят във времето t по равенствата:

(384) $\mu = \mu(t), \sigma_m = \sigma_m(t), \sigma_l = \sigma_l(t),$

е неинвариантна.

Доказателство: Ако допуснем противното, ще влезнем в противоречие с истинността на теоремите Т45 и Т54, които изискват за съществуването на инвариантен и инвариантно преходен режим, спазване на равенството (160), т. е., импедансните коефициенти $\mu$, $\sigma_m$ и $\sigma_l$ да са постоянни.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т56.** Неинвариантната система е неуправляема.

Доказателство: Дотук под управление негласно се разбираше понятие по смисъла на определението О2 за инвариантна система, т.

е., осъзнато човешко действие, определящо енергията (вж. аксиомата А7) на системата така, че да е налице продукт напълно и по всяко време отговарящ на избрания. Следователно, управляема е само система, която е инвариантна.

С това теоремата е доказана.

С доказването на теоремата Т56 привидно се стигна до извода, че на практика нищо не е в състояние да се управлява, защото в най-общия смисъл материята е нелинейна.

Управление, обаче, е възможно даже за системи подчинени на равенствата (384) - движещи се при променливо триене, с променяща се маса и с променлива еластичност на материята, от която са съставени. Примерно, всички возила със собствен енергиен източник - автомобили, кораби, самолети, ракети и много други. Те не само се управляват, но и управлението им постоянно се усъвършенства. И това е главният смисъл на прогреса в техниката.

Значи има условия за управление и на неинвариантни системи. Кои са те и как изглеждат?

Това ще проличи по-долу.

**Определение О30.** Система, за която равенството (384) е в сила при покой ($v = 0$), е статично неинвариантна (неработно старееща). Обратно - при движение ($v \neq 0$), системата е динамично неинвариантна (работно стареещa).

**Определение О31.** Динамично неинвариантна система, за която в работния й период Т € (0, $t_o$) импедансните й коефициентию $\mu$, $\sigma_m$ и $\sigma_l$ притежават свойството:

(385) $$\mu(0)= \mu(t_o),\ \sigma_m(0)=\sigma_m(t_o),\ \sigma_l(0)=\sigma_l(t_o),$$

т. е., се променят само по време на работа, е еластична. Обратно, ако равенствата (385) не са верни, т. е., импедансът се променя в резултат от работа, системата е пластична.

**Определение О32.** Импедансните коефициенти $\mu_N$, $\sigma_{mN}$ и $\sigma_{lN}$ на динамично неинвариантна система, която тя притежава в доработния си период - Т € ($-\infty$, 0) и, за които производителят на системата гарантира, че ще останат достатъчно дълго постоянни, наричаме номинални импедансни коефициенти.

**Определение О33.** Разликите $D_N$:

(386) $D_N$:{$\mu_N - \mu(t)$, $\sigma_{mN} - \sigma_m(t)$ and $\sigma_{lN} - \sigma_l(t)$}

наричаме адитивни степени на неинвариантност.

Определение О34. Отношенията $R_N$:

(387) $R_N$:{$\mu_N / \mu(t)$, $\sigma_{mN} / \sigma_m(t)$ and $\sigma_{lN} / \sigma_l(t)$}

наричаме мултипликативни степени на неинвариантност.

Аксиома Е15. Равенствата (384) представляват непрекъснати функции с ограничена вариация на времето t в работния й период T € (0, $t_o$).

**Аксиома Е16.** Степените на неинвариантност са допустими, ако в работния период T € (0, $t_o$) на системата са в сила границите:

(388) $D_N$--->const., $R_N$--->const., by t--->$t_o$.

**Определение О35.** Под характеризиране на система се разбира определянето на нейния импеданс.

**Теорема Т57.** Система с допустими степени на инвариантност може да се характеризира с номиналния си импеданс:

(389) $\Gamma_N(\Omega) = \mu_N + i(\sigma_{mN} - \sigma_{lN})$ Є $\Gamma(2)$

Доказателство: Ако степените на неинвариантност на системата са допустими по смисъла на граничните условия (388), те са пренебрежими и в работния период T номиналните импедансни коефициенти $\mu_N$, $\sigma_{mN}$ и $\sigma_{lN}$ на системата може да се приемат за постоянни. Равенството (389) ще бъде в сила и системата ще може да се характеризира като линейна с определения по него номинален импеданс $\Gamma_N(\Omega)$.

С това теоремата е доказана.

**Определение O36.** Номиналният импеданс на системата се нарича главна техническа характеристика.

**Теорема T58.** Система, чийто работен период $T_\Sigma$ представлява обединението:

(390) $T_\Sigma$: (0, $t_o$) U (0, $t_1$) U,..., U (0, $t_i$)U,...,

и степените й на неинвариантност са допустими за всеки период $T_i$ € ($_{ti-1}$, $t_i$) има за главна техническа характеристика редицата от импеданси:

(391) $\Gamma_{\Sigma N} = \Gamma_{No}, \Gamma_{N1},..., \Gamma_{Ni},...,$

чийто всекичлен член $\Gamma_N$ характеризира съответния период $T_i$.

Доказателство: Щом работният период $T_\Sigma$ на системата представлява обединение на непрекъснати интервали от времето t и във всеки от тези интервали степените на неинвариантност на системата са допустими, то тя може да работи непрекъснато в целия си работен период $T_\Sigma$, преминавайки от линейната характеристика $\Gamma_{Ni-1}$ в линейнита характеристика $\Gamma_{Ni}$. Следователно, линейните характеристики $\Gamma_{Ni}$ могат да се обединят в редицата (391).

С това теоремата е доказана.

**Определение O37.** Система, допускаща динамично състояние ($v \neq 0$), е работоспособна. Обратно - при недопустимост на такова състояние ($v = 0$) - системата е неработоспособна.

**Аксиома E17.** Енергийният източник на системата предава енергията си на потребителя, действайки върху него със силата $f_G(t)$, която зависи от свойствата на източника.

**Аксиома E18 (трети закон на Нютон).** Съпротивителната сила f(t) на системата се поражда като противодействие на потребителя на енергия срещу действащата сила $f_G(t)$ на енергийния източник и се подчинява на равенството:

(392) $f_G(t) + f(t) = 0$

**Теорема Т59.** Система, чиято главна техническа характеристика $Г_{ΣN}$ (вж. равенството (391)) непрекъснато расте по модул по време на работния й период Тд, т. е.,

(393) $|Г_{ΣN}| ---> \infty$, $t ---> \infty$, $t \in T_Σ$,

губи работоспособността си.

Доказателство: Модулът $|F(iΩ)|$ на съпротивителната сила f(t) съгласно аксиомата Е18 остава постоянен. А щом главната техническа характеристика на системата непрекъснато расте, това значи, че може да се допусне в някой от нейните съставни периоди $T_i$ импедансът й $Г_{Ni}$ да стане достатъчно голям, така че скоростта й v(t) да добие спектъра:

(394) $V(iΩ) = F(iΩ)/Г_{Ni}(iΩ)$,

чийто модул $|V(iΩ)|$ непрекъснато ще намалява, клонейки към нула, щом модулът $|Г_{ΣN}|$ продължава да расте. Системата се разпада чрез спиране на работата си.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т60.** Система, за която е валидна теоремата Т59 управлява обект, намаляващ потреблението на енергия, стремейки се да се превърне в идеален изолатор.

Доказателство: Щом модулът $|V(iΩ)|$ на спектъра на скоростта v(t) на системата клони към нула, то и потребяваната от нея пълна енергия Е, определена от скаларното произведение (вж. равенството (35)):

(395) $<V(iΩ), F(iΩ)> = E$

също ще клони към нула. Управляваният от системата обект се изолира постепенно от енергийния източник, стремейки се да се превърнев идеален изолатор.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т61.** Обект превърнат в идеален изолатор не потребява никаква мощност от енергийния източник на системата.

Доказателство: Идеалният изолатор по силата на теоремата

Т60 не потребява енергия. Тогава производната dE/dt на скаларното

произведение (395), което определя потребяваната от изолатора

пълна мощност S, т. е.,

(396) $dE/dt = d(\langle V(i\Omega), F(i\Omega)\rangle)/dt = S$,

също ще бъде нула.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т62.** Система, чиято главна техническа характеристика $\Gamma_{\Sigma N}$ (вж.равенството (391)) непрекъснато намалявапо модул по време на работния й период $T_{\Sigma}$, т. е.,

(397) $|\Gamma_{\Sigma N}|\text{--->}0,\ t\text{--->}\infty,\ t\ Є\ T_{\Sigma}$,

се претоварва от работа и се превръща в потребител на безкрайна мощност.

Доказателство: То е обратното следствие от доказването на теоремата Т59, Т60 и Т61.

Щом модулът на импеданса $|\Gamma_{\Sigma N}|$ непрекъсната намалява по смисъла на прехода (397), модулът $|V(i\Omega)|$ на спектъра на скоростта v(t) на системата ще клони към безкрайност по смисъла

на равенството (394). От друга страна, според теоремата Т61 следва, че и производната на скаларното произведение (396), определяща потребяваната от системата мощност, също ще клони към безкрайност по модул.

С това теоремата е доказана.

**Аксиома Е19.** Енергийният източник на системата не зависи от поведението (респ. характеристиките) на управлявания обект.

**Теорема Т63.** Главната техническа характеристика на системата е мяра за съществуване на управлявания обект при противопоставянето му на енергийния източник.

Доказателство: Следвайки логиката на диаграмата (189), множеството импеданси $\Gamma_{\Sigma N}$, образуващи главната техническа характеристика на системата, ще определят еднозначно за целия й работен период $T_{\Sigma}$ потребяваната от управлявания обект енергия Е по диаграмата:

$$(398)\qquad A:\{V(i\Omega),\Gamma_{\Sigma N}\}\xrightarrow{\alpha}E,$$

където с α бележим α-алгебрата, преобразуваща характеристичното множество А на системата в енергийното множество Е.

При преходен режим множеството импеданси $\Gamma_{\Sigma N}$ ще принадлежи по силата на теоремата Т51 на линейното импедансно пространство Г(2), а потребяваната енергия Е - на линейното енергийно пространство Е(2) (вж. теоремата Т22). Двете пространства по силата на теоремата Т52 са ковариантно двойствени, т. е.:

$$(399)\qquad \Gamma(2)\xrightarrow{\alpha}E(2)\xrightarrow{\alpha^{-1}}\Gamma(2)$$

Диаграмата (399) говори, че потребяваната от управлявания обект енергия Е в преходен режим се определя изоморфно от главната техническа характеристика $\Gamma_{\Sigma N}$ на системата. От своя страна потребяваната енергия Е се противопоставя на генерираната от източника на системата енергия. С други думи, съществуването на импеданс (импедансно пространство Г(2)) поражда съществуването на потребявана енергия (енергийно пространство E(2)), която противостои на генерираната от източника енергия.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т64.** Система, чиято главна техническа характеристика се подчинява на прехода (397), се разпада чрез разрушаване на управлявания обект.

Доказателство: То е следствие от доказването на теоремата Т63.

Щом импедансното множество (391) клони към нула, това според теоремата Т63 значи, че намаляват съпротивителните възможности на управлявания обект срещу енергийния източник на системата. Когато множеството (391) стане нула, управляваният обект престава да съществува. Енергийният източник според аксиомата Е19 е оцелял, но е разрушил обекта.

С това теоремата е доказана.

С доказването на теоремите Т55,...,Т64 се показа съществуването на границите на инвариантността, както и границите между работоспособността и разпадането на системата. Условията, при които тези два вида граници не могат да се преминат, са посочени в следващия раздел.

## УСТОЙЧИВОСТ

**Определение О38.** Свойството на системата да запазва работоспособността си след преход, т. е., способността на системата да извършва прехода:

(400) $\lim(v(t) - v^o) = 0,\ t \to \infty,\ v^o \neq \infty,$

където с $v^o$ бележим избраната инвариантна стойност на скоростта

$v(t)$, която целим да постигнем след прехода в избрания момент to, се нарича устойчивост, а системата, притежаваща тази способност - устойчива.

**Теорема Т65 (критерий на Лагранж).** Устойчива е всяка система, в чиято неутрална точка (вж. аксиомите А1 и А2) действително не се потребява енергия, т. е.:

(401) $\lim[E_G(t) - E(t)] = 0, t\text{-->}\infty,$

където с $E_G(t)$ бележим генерираната от източника, а с $E(t)$ - потребяваната от управлявания обект енергия на системата.

Доказателство: Спазването на истиността на (401) по смисъла на равенството (395) изисква:

(402) $\lim[<V(i\Omega), F_G(i\Omega)> - <V(i\Omega), F(i\Omega)>] = 0, t\text{-->}\infty$

където с $F_G(i\Omega)$ бележим спектъра на действащата от източника

върху обекта сила $f_G(t)$.

Според третия закон на Нютон (вж. равенството (392)) двата спектъра $F_G(i\Omega)$ и $F(i\Omega)$ следва да се стремят към равенство по модул и противофаза по аргумент. Следователно, преходът (402) може да придобие вида:

(403) $\lim[<V(i\Omega), F_G(i\Omega)> - <V^o(i\Omega), F(i\Omega)>] = 0, t\text{-->}\infty$

където с $V^o(i\Omega)$ бележим спектъра на избраната инвариантна стойност vo на скоростта v(t), която целим да постигнем след прехода в избрания момент $t_o$. И тъй като според аксиомата Е19 енергийният източник не зависи от поведението на потребителя, спектърът $F_G(i\Omega)$ може да се приеме за постоянен, а преходът (403) за еквивалентен на (400).

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т66.** Критерият на Лагранж е главният критерий за устойчивост на всяка система и всички други критерии (примерно, на Раус - Хурвиц, Найквист, Попов и др.) са практично верни, доколкото са следствия от него.

Доказателсво: Преходът (401) определя стремежа на системата за постигане на енергийно равновесие. И тъй като всеки друг вид равновесие - подобно на равновесието (400) - според теорията на инвариантността се постига по всеобщата енергийна мяра за равновесие, следва че всички критерии за устойчивост, в това число и материално абстрактните (математичните) критерии на Раус - Хурвиц, Найквист, Попов и др. ще бъдат верни само при условия, които ги правят следствие от критерия на Лагранж. Поради това прилагането на последните критерии е възможно чисто практично, за частни случаи подчинени на споменатите условия.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т67.** Инвариантната система притежава вечна устойчивост, т. е., съгласно критерия на Лагранж:

(404) $\lim[\langle V(i\Omega), F_G(i\Omega)\rangle - \langle V(i\Omega), F(i\Omega)\rangle] = 0,$

$t \in T = (-\infty, \infty)$

Доказателство: Предвид постоянния си импеданс

(405) $\Gamma(i\Omega) = \text{const.} \quad -\infty \leq t \leq \infty,$

инвариантната система ще допуска под действието на силата $f_G(t)$ на източника си скорост $v(t)$ със спектъра:

(406) $V(i\Omega) = F(i\Omega)/\Gamma(i\Omega), \quad -\infty \leq t \leq \infty,$

който ще добива след всеки преходен момент $t_o$ постоянния модул $|V(i\kappa)|^o$. От друга страна, според третия закон на Нютон двата спектъра $F_G(i\Omega)$ и $F(i\Omega)$ ще се стремят към равенство по модул и противофаза по аргумент. Следователно, преходът (404) ще е вечно налице.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т68.** Еластична система (вж. определението О31), която има главна техническа характеристика $\Gamma_\Sigma$ по силата на теоремата Т58, притежава устойчивост само в границите на работния си период $T_\Sigma$ (вж. обединението (390)), т. е., съгласно критерия на Лагранж:

(407) $$\lim[<V(i\Omega), F_G(i\Omega)> - <V(i\Omega), F(i\Omega)>] = 0,$$
$$t \in T_\Sigma = (t_o, t_i)$$

Доказателство: Щом главната техническа характеристика $\Gamma_\Sigma$ на системата представлява редица от импедансите $\Gamma_{Ni}$, които се приемат за постоянни за всеки период $T_i$, т. е.,

(408) $$\Gamma_{Ni} = \text{const.},\ t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

и предвид на факта, че интервалът

(409) $$(t_o, t_i) \in (-\infty, \infty),$$

по силата на теоремата Т67 преходът (407) ще бъде истинен за периода $T_\Sigma$.

С това теоремата е доказана.

Теорема Т69. Еластична система (вж. определението О31), която няма главна техническа характеристика $\Gamma_\Sigma$ по силата на теоремата Т58, притежава устойчивост само в околността $\delta t_i$ на границите на работния си период $T_\Sigma$, т. е., съгласно критерия на Лагранж:

(407-1) $$\lim[<V(i\Omega), F_G(i\Omega)> - <V(i\Omega), F(i\Omega)>] = 0,$$
$$t \in T_\Sigma = \delta t_o, \delta t_1, \delta t_2,...,\delta t_i,...$$

Доказателство: Щом главната техническа характеристика вд на системата представлява редица от импедансите $Г_{Ni}$, които се приемат за постоянни само за всеки начален или краен интервал лti от всеки работен период $T_i$, т. е.,

(408-1) $Г_{Ni}$=const., t Є $T_{\Sigma} = \delta t_o, \delta t_1, \delta t_2, ..., \delta t_i, ...$

и предвид на факта, че множеството интервали

(409-1) $T_{\Sigma}$ Є $(t_o, t_i)$,

по силата на теоремата Т68 преходът (407) ще бъде истинен за моментите $T_{\Sigma}$.

С това теоремата е доказана.

**Определение О39.** Максимален характеристичен период $T_{\Sigma M}$ на система наричаме максималния интервал от време $(0, t_M)$, в който тя може да се характеризира по силата на теоремата Т58.

**Определение О40.** Гаранционен характеристичен период $T_{\Sigma G}$ на система наричаме гарантирания от фирмата - производител интервал от време $(0, t_G)$, в който тя може да се характеризира по силата на теоремата Т58.

**Определение О41.** Адитивна сигурност (степен на сигурност) на система представлява разликата:

(410) $D_S = T_{\Sigma M} - T_{\Sigma G}$,

а частното:

(411) $R_S = T_{\Sigma M} / T_{\Sigma G}$ -

мултипликативна сигурност.

Определение O42. Реално сигурна е всяка система, за която:

(412) $D_S \geq 0$ and $R_S \geq 1$

и обратно - нереално сигурна (несигурна) е всяка система, за която неравенствата (412) не са в сила.

**Теорема Т70.** Пластична система е устойчива само в работния й период $T_\Sigma$, когато той е по-малък или равен на максималния й характеристичен период $T_{\Sigma M}$, т. е.:

(413) $T_\Sigma \leq T_{\Sigma M}$.

Доказателство: Ако неравенството (413) е спазено, по силата на теоремите Т68 и Т69 условията за устойчивост на еластична система ще съвпаднат с тези на пластична. Следователно, системата ще е устойчива, докато според неравенствата (412) е реално сигурна. Вън от тази сигурност системата подлежи на ремонт или се разпада чрез спиране или разрушаване (вж. теремите Т59 и Т64).

С това теоремата е доказана.

С доказването на теоремите Т65,...,Т70 се посочиха условията, при които системата може да бъде устойчива, т. е., да запазва работоспособността си без да настъпи необратимото й разпадане чрез спиране или разрушаване. В крайна сметка се видя, че устойчивост съществува или, ако системата работи в условията на допустима неинвариантност, която съкращава работния й период или в условията на инвариантност. Нека обобщим по видове системи и теореми условията за съществуване на устойчивост в следната таблица:

(414) УСЛОВИЯ И ПЕРИОДИ НА УСТОЙЧИВОСТ

| Вид на системата | Условия според теорема | Период |
|---|---|---|
| Инвариантна | Т67 | неограничен |
| Еластична | Т68 | продължителни интервали |
| Еластична | Т69 | къси интервали |
| Пластична | Т69, Т70 | продължителни интервали |

Вън от периодите на устойчивост системата е неуправляема и това ще се види добре в следващия раздел.

## АВТОМАТИЧНО УПРАВЛЕНИЕ

**Определение О43.** Предварителния запис за работата $v^o$ на системата във времето t през работния й период T от вида:

(415) $$v^o = v^o(t),\ t \in T,$$

наричаме работна (производствена) програма.

**Определение О44.** Управление, което има за цел спазването на работната програма на системата, се нарича програмно.

**Определение О45.** Управление, което има за цел запазването на устойчивостта на системата, се нарича регулиране.

**Определение О46.** Промяната във времето t на действително необходимата за потребление от обекта мощност наричаме управляващо системата действие (въздействие).

**Определение О47.** Когато управляващото действие се извършва от човек (човешка ръка, крак, глас и др.), управлението е ръчно, а когато системата сама извършва това - автоматично.

**Определение О48.** Възможните комбинации от видовете управление според целта му и начина на въвеждане на програмата определят следните:

(416) ВИДОВЕ СИСТЕМИ ПО ЦЕЛ НА УПРАВЛЕНИЕТО И НАЧИН НА ВЪВЕЖДАНЕ НА ПРОГРАМИТЕ

| Система | Регулиране | Програмно управление |
|---|---|---|
| Ръчна | ръчно | ръчно |
| Програмна | ръчно | автоматично |
| Автоматична | автоматично | ръчно |
| Автоматична програмна | автоматично | автоматично |

**Определение О49.** Когато управляващото действие е изброимо (дискретно) множество от стойности, управлението е дискретно (точково, позиционно, защитно, цифрово и т. н.), когато е непрекъснато (аналогово) множество - непрекъснато (аналогово), а когато е обединение от двата вида множества - управление от общ вид.

**Аксиома Е20.** Понятието “дискретно управляващо действие” е условно и се използва единствено за простота на разсъжденията, когато някоя функция на времето t прави преходи спрямо нулата, била тя абсолютна или относителна.

**Определение О50.** Видовете управление според математичния вид на управляващото действие определят дискретни, аналогови и от общ вид управлявани системи.

**Определение О51.** Преобразуването на неявните промени на физична величина в явни наричаме информиране за величината, а постигнатия от информирането резултат (запис на промените за период T от времето t) - нформация.

**Определение О52.** Устройството, преобразуващо неявната величина в явна, създава информация и е информационен източник, а устройството, приемащо информацията - информационен приемник (наблюдател, потребител).

**Определение О53.** Устройството, пренасящо информацията от източника до приемника, наричаме информационна линия (мрежа, канал)

**Определение О54.** Енергията (електрична, светлинна, механична и т. н.), пренасяща информацията по информационната линия, наричаме информационен носител

**Определение О55.** Величината от характеристичното множество на информационния носител, която се изменя във функция от неявната по определението О51 величина при създаването или приемането на информацията за нея, се нарича информационен сигнал.

**Определение О56.** Когато функцията на сигнала е ковариантна с неявната по определението О51 величина, сигналът е положително истинен или истинен, когато е контравариантна - отрицателно (противо-) истинен, а когато не е нито ковариантна, нито контравариантна - неистинен (дезинформационен).

**Аксиома Е21.** Когато дезинформационният сигнал е резултат от преднамерено действие, истината или противоистината е защитно изменена (кодирана) и подлежи на декодиране, а когато той е резултат от случайно действие - истината или противоистината е смесена с шумове по информационната линия.

**Определение О57.** Времето, през което сигналът преминава от източника до приемника на информацията без да настъпи функционална разлика между създадения и приетия сигнал, наричаме реално време.

**Определение О58.** Величина, за която информацията се създава и приема по време на работа на системата, т. е., при t Є T, се нарича свободна променлива (променлива), а тази, за която това става извън работния период на системата - параметрична променлива (параметър).

**Аксиома Е22.** За всяка сътворена от човека система съществува вероятност за статично и динамично стареене (вж. определението О30).

**Аксиома Е23.** Главната техническа характеристика вд на

системата се определя (измерва, контролира) вън от работния й

период T, а работата й v(t) - по време на него, т. е., при t о T

**Теорема Т71.** За запазване устойчивостта на системата (вж. определението О45) през работния и период, т. е., когато t Є T, е необходимо непрекъснато наблюдаване на работата й v(t).

Доказателство: То е следствие от аксиомата Е23, според която по време на работа се следи функцията v(t).

Ако допуснем, че главната техническа характеристика вд на системата се променя по време на работния й период T, това - според определението за $\Gamma_\Sigma$ (вж. определението О36) заместено в равенството (406) - ще предизвика промяна във функцията v(t) по равенството:

(417) $v(t) = F^{-1}[F(i\Omega)/\Gamma_\Sigma]$, t Є T,

където $F^{-1}$ е обратното фуриерово преобразуване на спектъра на скоростта $V(i\Omega)$.

Според третия закон на Нютон (вж. аксиомата Е18) друга промяна е невъзможна. Следователно, еднозначната промяна на $\Gamma_\Sigma$ води изоморфно до промяна на v(t) по диаграмата:

(418) $\Gamma_\Sigma \xrightarrow{(417)^{-1}} v(t) \xrightarrow{(417)} \Gamma_\Sigma$

а това значи, че наблюдавайки v(t), се наблюдава и $\Gamma_\Sigma$, т. е., състоянието на неустойчивост предизвикано от степента на неинвариантност и обратно - състоянието на неинвариантност предизвикало неустойчивостта.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т72.** За запазване устойчивостта на системата (вж. определението О45) през работния и период, т. е., когато t Є T, е необходимо упражняване върху нея на управляващо действие във функция от работата й v(t).

Доказателство: Според определението О46 управляващото действие U представлява втората производна по времето t на действително потребяваната от обекта енергия, която съгласно аксиомата Е20 винаги съществува и има вида:

(419) $U = d^2/dt^2\langle V(i\Omega), V(i\Omega)\cdot\Gamma_\Sigma\rangle$

Или, с други думи, промяна на вд води изоморфно до промяна на U по диаграмата:

(420) $\Gamma_\Sigma \xrightarrow{(419)^{-1}} U \xrightarrow{(419)} \Gamma_\Sigma$

От друга страна, сравнявайки диаграмите (419) и (420), стигаме до извода, че съществува изоморфизма:

(421) $U \xrightarrow{(419)} \Gamma_\Sigma \xrightarrow{(417)^{-1}} v(t) \xrightarrow{(417)\circ(419)^{-1}} U$,

от който следва, че упражняването на управляващото действие U върху системата наистина запазва устойчивостта й, ако е във функция с работата й v(t).

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т73.** За запазване на устойчивостта (вж. определението О45) и производствената програма (вж. определението О43) на системата през работния и период, т. е., когато t Є T, е необходимо и достатъчно непрекъснато наблюдаване на работата й v(t) и упражняване върху нея на управляващо действие UG от вида:

(422) $U_G = - A \cdot dv/dt$,

където A е нормираща величина измервана във ватове по секунди на метър (Ws/m) или нютони (N).

Доказателство: Щом според теоремата Т72 е необходимо управляващото системата действие U да е във функция от наблюдавната работа v(t) на системата, значи управление на системата без наблюдение на работата й не може да съществува. От това следва, че условието (422) наистина е необходимо. За да бъде то и достатъчно, трябва то да принуждава системата да премахва всяко отклонение от програмата си $v^o$, което значи да извършва прехода:

(423) $\lim(v - v^o) \dashrightarrow 0$, t Є T. $t \to t_o$

От този преход следва, че разликите v - vo и t - to трябва да клонят към нула едновременно, което от своя страна значи, че отношението:

(424) $\lim[(v - v^o)/(t - t_o)] \dashrightarrow 0$, t Є T, $t \to t_o$.

А това в крайна сметка значи, че е необходимо производната:

(425) $dv/dt \to 0,\ t \to t_o$.

И тъй като за осъществяването на прехода (425) е необходимо да се въведе промяна в действието U на енергийния източник, то следствието (419) се приема, че е породено от причината:

(426) $$U_G = d^2/dt^2\langle V(i\Omega), F_G(i\Omega)\rangle = d^2/dt^2\langle v(t), f_G(t)\rangle,$$

където с $f_G(t)$ бележим действащата върху обекта сила на източника, а с $F_G(i\Omega)$ - спектъра й. При това, за да настъпва равновесие в системата, трябва двете действия върху системата $U_G$ и U да се неутрализират взаимно по правилото:

(427) $$U_G + U = 0 \text{ или } U_G = -U,$$

т. е. на действието $U_G$ да застава противодействието U и обратно.

Нека, имайки предвид аксиомите E17 и E19, извършим двукратното диференциране на крайния резултат от (426). Ще излезне, че:

(428) $$d^2/dt^2\langle v(t), f_G(t)\rangle = d^2/dt^2\left[\int_o^T v(t) f_G dt\right] = f_G(dv/dt) = U_G,$$

което значи, че условието (422) е вярно.

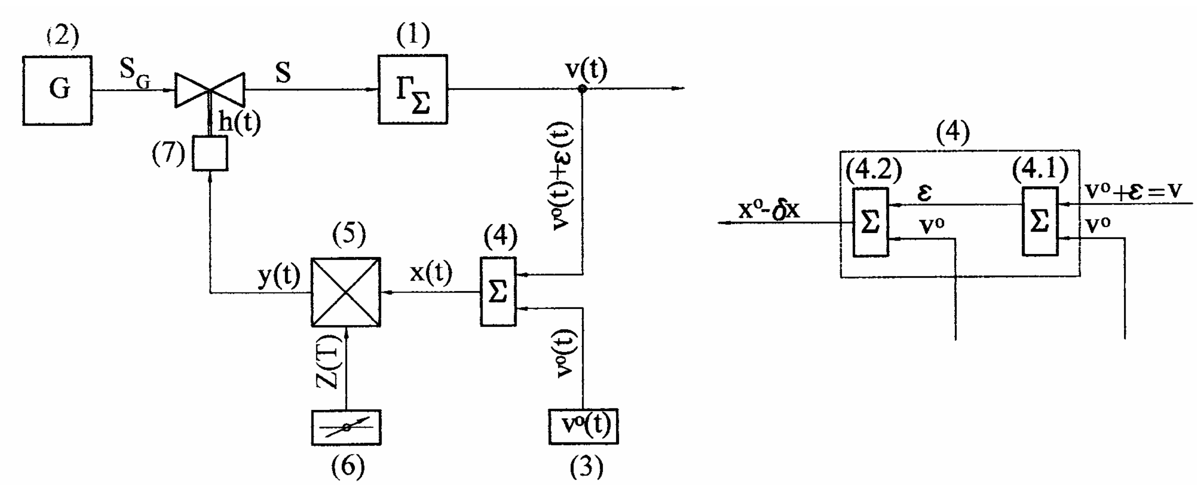
От друга страна, според третия закон на Нютон между действащата сила $f_G$ на източника и съпротивителната сила $F\text{-}1[V(i\Omega)\cdot\Gamma_\Sigma]$ на обекта (вж. равенството (419)) съществува зависимостта:

$$(429) \qquad F^{-1}[V(i\Omega)\cdot\Gamma_\Sigma] = - f_G,$$

от което след сравняване на равенствата (428) и (419) следва, че при упражняване на действието $U_G$ правилото (427) ще се спазва и системата ще се стреми към равновесие. С други думи, необходимото условие (422) е и достатъчно.

С това теоремата е доказана.

**Теорема Т74.** За запазване на устойчивостта и производствената програма на системата през работния и период, т. е., когато $t \in T$, е необходимо и достатъчно тя да бъде автоматично програмно управлявана (вж. определенията (416)) по схемата:




Фиг. 14

На схемата с (1) е отбелязан управляваният обект, с (2) - енергийният източник, с (3) - програматорът на предвидената работа $v^o(t)$ на системата, с (4) - алгебрично сумиращо устройство за сравняване на $v^o(t)$ с действително извършваната работа v(t) и изработване на сигнал за грешна работа ε(t), с (5) - пропорционално - интегрално - диференциален (PID) регулатор за изработване на поправителен сигнал δx(t) срещу грешката ε(t), с (6) - ръчно регулиращо устройство за настройване на регулатора според съставките (параметрите) μ, $C_l$ и m (вж. равенствата (94), (119) и (116)) на главната техническа характеристика $\Gamma_\Sigma$ на системата по правилото:

(430) $P = \mu$, $I = C_l$ and $D = m$,

със (7) - сервомеханизъм, променящ чрез дросела - (8) - мощността на източника $S_G$ до действително потребяваната от обекта мощност S.

Устройствата (3), (4), (5),...,(8) образуват автоматичен управляващо - регулационен кръг (контур) или система за автоматично управление и регулиране. По този начин според определенията (416) обектът, енергийният източник и управляващо-регулационният кръг, от своя страна, образуват автоматична програмна система. Тя се подчинява на следните общи закономерности:

а) действително потребяваната от обекта мощност S е пропорционална на хода h на серводвигателя (7), измерван в метри (m) по правилото:

(431) $S = c_S h$,

където $c_S$ е нормираща константа (m/W),

б) ходът h на серводвигателя е пропорционален на изходния сигнал y от регулатора (5) по правилото:

(432) $h = c_h y$,

където $c_h$ е нормиращата константа (m/Iy). Тук с Iy бележим единицата мяра на информационния сигнал , която може да бъде ампери (A), волтове (V), паскали (Pa) и т. н., в зависимост от физичната величина - носител на информацията за функцията y(t),

в) изходът y на регулатора е функция на входните му величини x(t) и z(T) по правилото:

(433) $$y = Px + (1/I)\int_{o}^{t} xdt + D(dx/dt)$$

Тук с T = const. бележим работния период на системата,

г) параметричният вход z на регулатора е функция на работния му период T. Веднаж настроен от човешка ръка чрез ръчното регулиращо устройство (6), той остава постоянен през целия работен период T на системата, спазвайки правилото:

(434) $z = z(P, I, D)$, $P = const.$, $I = const.$, $D = const.$, $t \in T$.

д) променливият вход x на регулатора, който е изход на сумиращото устройство (4), е функция на входните величини v(t) и vo(t) към същото устройство по правилото:

(435) $x = x^o - \delta x$,

където $x^o$ е пропорционалният на програмата vo(t) и нормиран с коефициента cx (sIx/m) сигнал:

(436) $x^o = c_x v^o$,

а функцията δx, подчинена на правилото:

(437) $\delta x = c_x \varepsilon = c_x(v - v^o)$

е сигнал за команда - поправка към регулатора, когато работата на системата v(t) допусне грешката:

(438) $\varepsilon = v - v^o$,

т. е., когато скоростта v(t) на системата нарасне спрямо предвидената програмна стойност $v^o(t)$ по правилото:

(439) $v = v^o + \varepsilon$.

е) управляващо - регулационният кръг внася поправката $\delta S$ в мощността S преди грешката $\varepsilon$ в работата $v$ да е придобила нова стойност, т. е., системата за автоматично управление и регулиране е работеща в реално време информационно - командна система.

Доказателство: Обектът и енергийният източник на фиг. 14 са сътворени от човек. Следователно, според аксиомата Е22 е възможно те да остареят и главната техническа характеристика вд на системата да се промени, което според теоремите Т71 и Т72 значи, че е необходимо наблюдаване на работата v(t) на системата и упражняване на управляващо действие U върху нея.

Според схемата на фиг. 14 работата v(t) на обекта се наблюдава, информацията от наблюдението се предава на управляващия кръг, който изработва управляващия ход h(t) на сервомеханизма (7). В резултат, ходът h(t) предизвиква някакво управляващо действие dS(t)/dt върху източника на енергия, така че да се промени потребяваната от обекта мощност S. Това според теоремите Т71 и Т72 значи, че необходимостта за запазване на устойчивостта и производствената програма на системата е налице. Дали тя е достатъчна?

Разглеждани в равновесно и неравновесно състояние, закономерностите (431),...,(439) пораждат следната:

(440) ДИНАМИЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА НА СИСТЕМАТА

| Наблюдавана величина | Равновесно състояние на системата | Неравновесно състояние на системата |
|---|---|---|
| Работа, v(t) | $v^o(t)$ | v(t) |
| Програма, $v^o(t)$ | $v^o(t)$ | $v^o(t)$ |
| Грешка в работата, $\varepsilon(t) = v(t) - v^o(t)$ | 0 | $v(t) - v^o(t)$ |

| | | |
|---|---|---|
| Вход към регулатора, x(t) | $x^o(t)$ | $x(t)$ |
| Поправка към регулатора, $\delta x = x^o(t) - x(t)$ | 0 | $x^o(t) - x(t)$ |
| Изход към регулатора, y(t) | $y^o(t)$ | $y(t)$ |
| Поправка след регулатора, $\delta y = y^o(t) - y(t)$ | 0 | $y^o(t) - y(t)$ |
| Ход на сервомеханизма, h(t) | $h^o(t)$ | $h(t)$ |
| Поправка на сервомеханизма, $\delta h = h^o(t) - h(t)$ | 0 | $h^o(t) - h(t)$ |
| Мощност, S(t) | $S^o(t)$ | $S(t)$ |
| Поправка на мощността, $\delta h = S^o(t) - S(t)$ | 0 | $S^o(t) - S(t)$ |
| Управляващо действие, U | $dS^o(t)/dt$ | $dS(t)/dt$ |

Според динамичната характеристика излиза, че ако скоростта v на системата се увеличи спрямо програмната си стойност $v^o$ с грешката $\varepsilon$, управляващият кръг ще предизвика намаляване на мощността S към обекта спрямо програмната мощност $S^o$ с поправката $\delta S$ по веригата от устройствата (4), (5), (7) и (8) (вж. фиг. 14), следвайки последователността от действия:

$$(441) \qquad \overset{(4)}{(v^o + \varepsilon)} \text{--->} \overset{(5)}{(x^o - \delta x)} \text{--->} \overset{(7)}{(y^o - \delta y)} \text{--->}$$

$$\text{--->} \overset{(7)}{(h^o - \delta h)} \text{--->} \overset{(8)}{S^o - \delta S},$$

При това действие на управляващия кръг, производната на скоростта:

$$(442) \qquad dv/dt = \lim[(v-v^o)/(t-t_o)] > 0,\ v > v^o,\ t\text{-->}t_o$$

а производната на мощността (управляващото действие U):

$$(443) \qquad U = dS/dt = \lim[(S-S^o)/(t-t_o)] < 0,\ S < S^o.\ \ t\text{-->}t_o$$

С други думи, производните (442) и (443) са противни по знак, което според теоремата Т73 значи, че предвидената по схемата на фиг. 14 необходимост е и достатъчна.

С това теоремата е доказана.

**Определение O59.** Бързодействие $f_s$ ($s^{-1}$) на управляващо - регулационен кръг (автоматичен или ръчен) наричаме величината:

$$(444) \qquad f_s = 1/\tau,$$

където с $\tau$ бележим времето от началото на неравновесното състояние (появата на грешката $\varepsilon$) на системата до началото на управляващото действие U или противодействие $U_G$.

**Определение O60.** Неточност $\theta^{-1}$ (W/s) на управляващо - регулационен кръг (автоматичен или ръчен) наричаме разликата:

$$(445) \qquad \theta^{-1} = |dS/dt| - |dS_G/dt|$$

между необходимото за системата управляващо действие U  = dS/dt и действително извършеното от източника противодействие:

(446) $U_G = dS_G/dt$

**Определение О61.** Неинтелигентност (дезинформационен ефект) $\varphi^{-1}$ на управляващо - регулационен кръг (автоматичен или ръчен) наричаме величината:

(447) $\varphi^{-1} = y(x) - Y(X)$,

където с X бележим дезинформационен сигнал на входа на регулатора (5) от фиг. 14, който по правилото (433) поражда функцията:

(448) $$Y = PX + (1/I)\int_{o}^{t} Xdt + D(dX/dt),$$

на изхода на регулатора.

**Определение О62.** Величините θ и φ, които са реципрочни на неточността $\theta^{-1}$ и неинтелигентността $\varphi^{-1}$ на управляващо - регулационен кръг (автоматичен или ръчен), т. е.,

(449) $\theta = 1/\theta^{-1}$ и $\varphi = 1/\varphi^{-1}$,

наричаме съответно точност и интелигентност на управляващо - регулационния кръг.

**Аксиома Е24.** Всеки сътворен от човека управляващо - регулационен кръг притежава по-голямо бързодействие и по-голяма точност, но по-малка интелигентност от човека.

**Определение О63.** Състояние на системата, при което управляващо - регулационният й кръг губи интелигентността си в работния период Т, т. е.:

$$(450) \qquad \varphi(t) \to 0,\ t \to t_o,\ t \in T = (0, t_o),$$

наричаме аварийно (авария), а състояние, при което той може да възстановява интелигентността си, т. е.:

$$(451) \qquad \varphi(t) \to \infty,\ t \to t_o,\ t \in T = (0, t_o),$$

наричаме нормално.

**Аксиома Е25.** Всеки входен сигнал към устройствата (4), (5), (7) и (8) от управляващо - регулационния кръг на системата на фиг. 14 може да се създаде и въведе и ръчно (от човек).

**Теорема Т75.** Неточността $\theta^{-1}$ на управляващо - регулационния кръг на системата нараства при намаляване на бързодействието му $f_s$.

Доказателство: Ако изчислим управляващото върху системата действие $dS_\tau/dt$, отчитайки закъснението $\tau$ от равенството (444) на сигнала, който го предизвиква, ще излезне, че:

$$(452) \qquad dS_\tau/dt = \lim_{t \to t_o}[(S - S^o)/(t + \tau - t_o)],$$

От друга страна, необходимото за уравновесяване на системата противодействие $dS_G/dt$ се изчислява по равенството:

(453) $$dS_G/dt = \lim_{t \to t_o}[(S - S^o)/(t - t_o)],$$

Следвайки логиката на определението O60, неточността $\theta^{-1}$ на управляващо - регулационния кръг на системата ще се определя от разликата:

(454) $$\theta^{-1} = |dS_\tau/dt| - |dS_G/dt|.$$

Тя ще расте, когато $\tau$ расте, т. е., когато бързодействието $f_s$ на управляващо - регулационния кръг намалява.

С това теоремата е доказана.

**Теорема T76.** Системата на фиг. 14 може да запазва устойчивостта си и производствената си програма $v^o$, ако се управлява автоматично в нормално състояние и ръчно - при авария.

Доказателство: То е следствие от аксиомите E24 и E25 и теоремата T75.

Според теоремата T75 бързодействието $f_s$ на управляващо - регулационния кръг води към точността му $\theta$, а според равенството (447) и определението O63, ръстът на интелигентността, от своя страна, намалява дезинформационния ефект $\varphi^{-1}$ на управляващия сигнал Y(X), а от там - и вероятността от авария на системата.

И щом според аксиомата E25 човекът е по-интелигентен, но по-бавен и по-неточен от управляващо - регулационния кръг и, освен това, според аксиомата E25 може да замести всяко устройство от него, то той по-добре от кръга ще упранвлява системата в аварийно и по-зле в нормално състояние.

С това теоремата е доказана.

С доказването на теоремата T76 се доказаха условията, при които е възможно да се управляват неинвариантни системи. Те са:

- извършване на непрекъснато наблюдаване на работата им;

- упражняване на управляващо действие.

Точните количествени критерии за осъществяване на управлението се посочиха в теоремата Т73 и се илюстрираха чрез приложението им в теоремата Т74. Тези критерии са в сила при спазване на ограниченията (388). Вън от тях неинвариантните системи са неуправляеми. Нещо повече, те са застрашени от авария, както сочи теоремата Т76 и трябва да бъдат защитавани.

Как да се осъществява за тази цел защитното управление така, че управляваният обект да оцелява физически, когато го застрашава авария, за да се подлага на ремонт (рециклиране) и отново да застава в нормалното си работно състояние, това ще се види в следващия - последния раздел от тази научна разработка.

## ПОЗИЦИОННО УПРАВЛЕНИЕ И ЗАЩИТА ОТ АВАРИИ

**Определение О64.** Стъпален преход на функцията f във времето t наричаме промяната на ефективната й стойност F по правилото:

(455) $F = F_o = const., -\infty \leq t < 0,$

$$F = F(t) \neq const., 0 \leq t \leq \tau,$$

$$F = F_1 = const., \tau \leq t < \infty,$$

при това $F_o \neq F_1$, а с $\tau$ бележим времето на прехода.

**Определение О65.** Стъпалният преход е положителен, когато стъпалото $F_1 > F_o$ и отрицателен, когато $F_1 < F_o$.

**Определение О66.** Импулсен преход на функцията g във времето t наричаме промяната на ефективната й стойност G по правилото:

(456) $G = G_o = const., -\infty \leq t < 0,$

$$G = G(t) \neq const., 0 \leq t \leq \tau,$$

$$G = G_o = const., \tau \leq t < \infty$$

**Определение О67.** Импулсният преход е положителен, когато G(t) > Go и отрицателен, когато G(t) < Go.

**Теорема Т77.** Производната dF/dt на ефективната стойност F на функцията F(t), извършваща стъпален преход е функция, извършваща импулсен преход (импулс) с ефективна стойност от вида:

(457) $dF/dt = 0, -\infty \leq t < 0,$

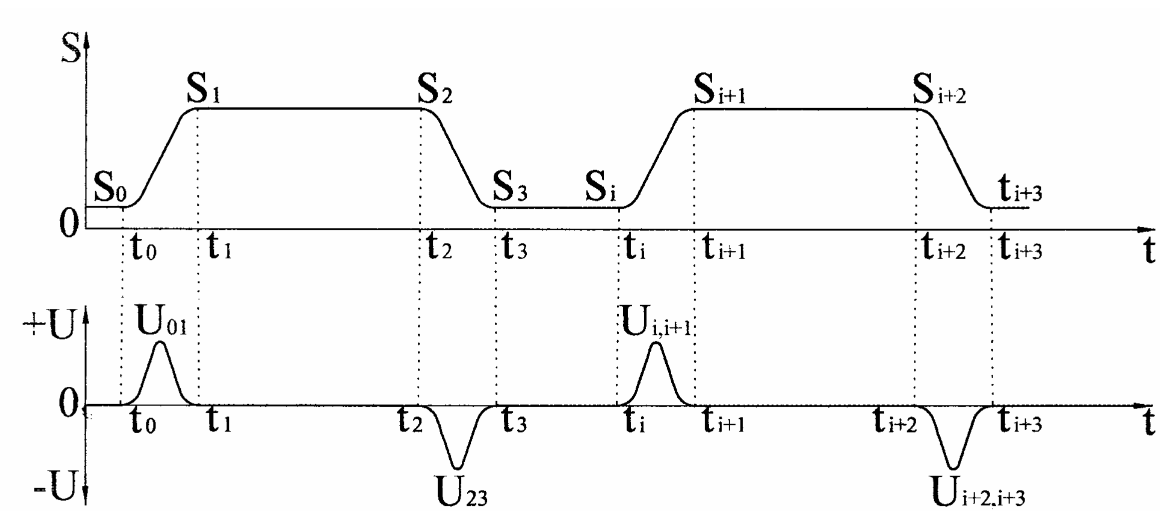
$$dF/dt = dF(t)/dt \neq 0, 0 \leq t \leq \tau,$$

$$dF/dt = 0, \tau \leq t < \infty.$$

Доказателство: Диференцирането на равенствата (455) без промяна на граничните им условия ще доведат до резултатите (458).

С това теоремата е доказана.

**Определение О68.** Система, при която (вж. фиг. 15) управляващото действие U се състои от алтернативни импулсни преходи, които предизвикват стъпални преходи на потребяваната от управлявания обект мощност S, се нарича дискретна.




Фиг. 15

**Определение О69.** Когато, от своя страна, преходите на управляващото действие U се предизвикват по програмен път като резултат от булевата функция:

(458) $v^o = V_B(V_1, V_2,...,V_i,...)$,

където с V1, V2,...,Vi бележим екстремни стойности на програмната функция $v^o(t)$, е налице дискретно (позиционно, точково и т. н.) програмно управление на системата.

**Определение О70.** Когато преходите на управляващото действие U се предизвикват като противодействие на опасност от изгубване на устойчивостта на системата, водеща до опасност от авария, т. е., когато те са резултат от булевата функция:

(459) $\Gamma = \Gamma_B(\Gamma_o, \Gamma_1,..., \Gamma_i,...)$,

където с $\Gamma_o, \Gamma_1,..., \Gamma_i,...$ бележим екстремни стойности на главната техническа характеристика на управлявания обект, е налице защитно управление (защита) на системата.

**Теорема Т78.** Ако на графиката на фиг. 15 означим характерните стойности на дискретно управлявана система:

- максимално потребявана мощност $S_{max}$: $S_1, S_2,...,S_{i+1}, S_{i+2},...$;

- минимално потребявана мощност $S_{min}$: $S_o, S_3,...,S_i, S_{i+3},...$;

- интервали на максималното потребление $\tau_{max}$: $\tau_{12} = t_2-t_1,..., \tau_{i+1,i+2} = t_{i+2}-t_{i+1}$;

- интервали на минималното потребление $\tau_{min}$: $\tau_{oo} = t_o-0, \tau_{3,i} = t_i-t_3,...$;

- максимално управляващо действие $U_{max}$: $U_{o1},...,U_{i,i+1},...$;

- минимално управляващо действие $U_{min}$: $U_{23},...,U_{i+2,i+3},...$, при спазване на отразените в таблицата (460) съотношения между тях, ще са налице следните:

(460) ВИДОВЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

| Система | Управляващо действие, U | Потребявана мощност, S | Време за максимално и минимално потребление, $\tau$ |
|---|---|---|---|
| Еластична по T68 | $U_{max} = U_{min} = const.$ | $S_{max} = const., S_{min} = const.$ | $\tau_{max} >> \tau_{min}$ |
| Еластична по T69 | $U_{max} = U_{min} = const.$ | $S_{max} = const., S_{min} = const.$ | $\tau_{max} << \tau_{min}$ |
| Пластична по T68 и T70 | $U_{max} \neq U_{min} \neq const.$ | $S_{max} \neq const., S_{min} \neq const.$ | $\tau_{max} >> \tau_{min}$ |
| Пластична по T69 и T70 | $U_{max} \neq U_{min} \neq const.$ | $S_{max} \neq const., S_{min} \neq const.$ | $\tau_{max} << \tau_{min}$ |
| Неустойчива към разрушаване по T64 | $U \to -\infty, t \to \infty$ (защитно противодействие) | $S \to \infty, t \to \infty$ (спонтанно действие) | Няма |
| Неустойчива към спиране по T59 | $U \to \infty, t \to \infty$ (защитно противодействие) | $S \to 0, t \to \infty$ (спонтанно действие) | Няма |

При това трябва да добавим, че пластичната система притежава свойствата:

(461) $$S_1 \approx S_2, \ldots, S_{i+1} \approx S_{i+2}, \ldots$$
$$S_o \approx S_3, \ldots, S_i \approx S_{i+3}, \ldots$$

Доказателство: То е следствие от посочените теореми T59, T64, T68, T69 и T70. Графиката на фиг. 15, таблицата (460) и свойствата

(461) илюстрират теоремите Т68, Т69 и Т70 в случаите, когато потребяваната мощност S и управляващото действие U са изброими (дискретни) множества в устойчив режим.

Тъй като неустойчивият режим е резултат от естествено или работно стареене на управлявания обект, то той се появява спонтанно, в случаен момент, който на практика е трудно предвидим. Ето защо обектът се нуждае от защита срещу него. Освен това, щом при неустойчивост спонтанно действието $S \to +\infty$, за да настъпи равновесие, трябва противодействието:

(462) $dS/dt = U \to -\infty,\ t \to \infty$

и обратно, ако действието S спонтанно клони към нула, трябва противодействието:

(463) $dS/dt = U \to +\infty,\ t \to \infty$.

С това теоремата е доказана.

С доказването на теоремата Т78 се доказаха условията за съществуване на най-разпространения в практиката вид управление - дискретното. Приложгенията му като позиционно програмно и защитно управление (регулиране) днес са част от всекидневния ни бит. Паленето и гасенето на електричните осветители, пускане и спиране на електродвигатели на помпи, вентилатори и прахосмукачки, превключване на скоростните предавки в автомобили, металорежещи и др. машини, защита на електроинсталации срещу късо съединение и т. н. - кому е непознато всичко това?

Нека завърши вече няколкогодишния научен труд. Той не изчерпва всичко, но мярата за неговата истинност и пълнота може да се определи само от времето, разбира се, ако бъде прочетен от достатъчно на брой компетентни хора.

Авторът завърши направата на емерсоновия си капан за мишки. Дали той е по-добър от този на съседа му?

София, 13.01.1998 г., Съставил:

Метропроект, 14.42 ч. (инж. М. Станков)

# Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Яворский Б. М., А. А. Детлаф, Справочник по физике, 1977 г., Наука, Москва

2. Златев М., Основи на електротехниката, 1964 г., Техника, София

3. Ненчев М., С. Салтиел, Лазерна техника, 1994 г., Св. Кл. Охридски, София

4. Tyagarajan K., A. K. Ghatak, Lasers. Theory and Applications, 1981 г., Plenum Press, New York

5. Глимм Дж., А. Джаффе, Математические методы квантовой физики, 1984 г., Мир, Москва

5. Аргирова Т., Теория на аналитичните функции, 1992 г., Св. Климент Охридски, София

6. Чакалов Л., Увод в теорията на аналитичните функции, 1957 г., Наука и изкуство, София

7. Корн Г., Т. Корн, Справочник по математике, 1973 г., Наука, Москва

8. Маклейн С., Г. Биркхоф, Съвременна алгебра, 1974 г., Наука и изкуство, София

9. Станков М., Теория на инвариантните системи за управление (ръкопис), НАЦИД - ЦТБ, 2000 г.

До декана

на Факултета по автоматика

към Техническия университет

София

Тук!

М О Л Б А

от инж. Милан Михайлов Станков, живущ в София, ж. к. Слатина, бл. 21, вх. В, ап. 72

Г-н декан,

Моля да се рецензира научната ми разработка под заглавието "Теория на инвариантността". Целта на рецензията е да се депозира ръкописа на разработката в Централната техническа библиотека в София, за да стане достъпен за читатели.

София, 25.04.1999 г. С почит:

(инж. М. Станков)